

# АВИАЦИЯ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКАЯ ТЕХНИКА

УДК 629.78

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО ЛИФТА ПРИ ПОДЪЁМЕ ГРУЗА НА ОРБИТУ

А. С. Ледков, Р. С. Пикалов

В работе построена многоточечная модель космического лифта. Трос представлен как совокупность материальных точек, соединённых невесомыми упругими стержнями. Подъёмник и противовес моделируются как материальные точки. С помощью полученной модели проведено исследование влияния движения подъёмника на динамику космического лифта. Установлено, что восхождение подъёмника приводит к возникновению поперечных колебаний в тросе. Проведено сравнение результатов многоточечной модели и ранее опубликованной двухзвенной модели. Показано, что картины колебаний существенно отличаются. В результате движения подъёмника в тросе возникают продольные колебания, которые благодаря воздействию силы инерции Кориолиса приводят к поперечным колебаниям. Двухзвенная модель не позволяет учесть эти явления. Исследовано влияние числа точек на точность получаемого результата.

**Ключевые слова:** космический лифт, трос, подъёмник, многоточечная модель, линейная плотность.

На сегодняшний день проблема поиска альтернативных способов доставки грузов в космос является актуальной научной задачей. Одним из таких способов может стать космический лифт. Идея состоит в том, чтобы протянуть трос от поверхности Земли до космической станции за геостационарной орбитой и доставлять груз в космос на подъёмнике. При этом энергия тратится только на увеличение высоты груза. Увеличение кинетической энергии груза происходит автоматически за счёт вращения всей конструкции вместе с Землей. Гравитационные и центробежные силы держат конструкцию в натянутом состоянии [1; 2]. Существует несколько концепций космического лифта [3–5]. Наиболее проработанным является проект, предложенный Bradley Edwards [5]. Данное исследование стало широко известным, и поч-

ти все последующие работы по космическому лифту базировались на его концепции. Стоит отметить, что концепция Edwards имеет ряд не до конца проработанных вопросов, в частности почти не затрагиваются вопросы организации систем контроля за состоянием оборудования и управления движениями лифта, обеспечивающие живучесть конструкции [6]. Однако эта концепция сегодня остается наиболее проработанной. В исследованиях [6–8] предложена концепция нагруженного космического лифта, определяющая более реалистичные черты и характеристики лифта.

Несмотря на большое количество работ по тематике космического лифта, до сих пор слабоизученным остаётся вопрос моделирования и исследования движения космического лифта с учётом движения подъёмника. Данной проблемой, в разное время, занимался ряд учёных [4–17]. В работах [11–14] было исследовано воздействие, оказываемое подъёмником на динамику космического лифта. Установлено, что движение подъёмника приводит к возникновению колебаний лифта, которые не затухают после его остановки. В работах [11; 13] использовались математические моде-

© Ледков А. С., Пикалов Р. С., 2016.

Ледков Александр Сергеевич

(ledkov@inbox.ru),

доцент кафедры теоретической механики;

Пикалов Руслан Сергеевич

(pickalovrs@gmail.com),

аспирант кафедры теоретической механики

Самарского университета,

443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

ли, в которых трос представлялся в виде стержня. В исследованиях [12; 14–16] построены более сложные многоточечные модели. Для исследования поперечных колебаний троса в работах [6–8] использовалась континуальная модель троса. Результаты [11–14] показывают, что можно снизить или полностью убрать негативное влияние от движения подъемника. Были предложены разные схемы подъема, позволяющие в разной степени уменьшить негативное влияние от движения подъемника. Тем не менее, данная проблема требует дальнейшего изучения.

Представленная работа является продолжением наших исследований, где для изучения динамики лифта была предложена двухзвенная математическая модель, в которой трос рассматривался в виде двух нерастяжимых стержней переменной длины [18; 19]. Первый соединял точку закрепления троса и движущийся подъемник, второй – подъемник и противовес. Данная модель позволяла учитывать изгиб троса, но не учитывала его упругость. Для получения более полной картины динамики лифта строится более сложная многоточечная модель космического лифта, учитывающая упругость троса. За основу взята математическая модель, предложенная Paul Williams [12]. Построенная модель может быть использована при моделировании динамики космических тросовых систем при изучении динамики троса. В рамках данной статьи особое внимание уделено моделированию влияния подъемника, вопрос влияния атмосферы и нецентральности гравитационного поля оставлен за рамками данной работы.

## 1. Многоточечная модель лифта

Рассмотрим механическую систему пространственного неэкваториального космического лифта (рис. 1). Она состоит из троса, противовеса и подъемника. Движение происходит в Ньютоновском гравитационном поле. Влияние атмосферы, солнечного ветра, луны и других возмущаемых факторов отсутствует. Трос представим как набор материальных точек, соединённых между собой невесомыми упругими стержнями, их число  $N + 1$ . Масса точек троса, как и площадь поперечного сечения стержней, зависит от расстояния до конца. Подъемник рассматривается как материальная точка, движущаяся вдоль троса.

Введём системы координат: подвижную вращающуюся вместе с Землёй систему  $Oxyz$ , неподвижную систему  $Ox_0y_0z_0$ . Ось  $Ox$  направим по направлению местной вертикали,  $Oz$  направлена в сторону северного полушария,  $Oy$  дополняет систему до правой.  $Oz_0$  – направлена по оси вращения Земли. Оси  $Ox_0$  и  $Oy_0$  направлены на неподвижные звёзды и вместе с  $Oz_0$  составляют правую систему координат. Начало систем координат в центре Земли, точка  $O$ .

### 1.1. Уравнения движения точек троса

Определим положение  $j$ -ой точки троса в системе координат  $Oxyz$  с помощью радиус вектора:

$$\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)^T, \quad (1)$$

где  $j = 0, \dots, N + 2$ .

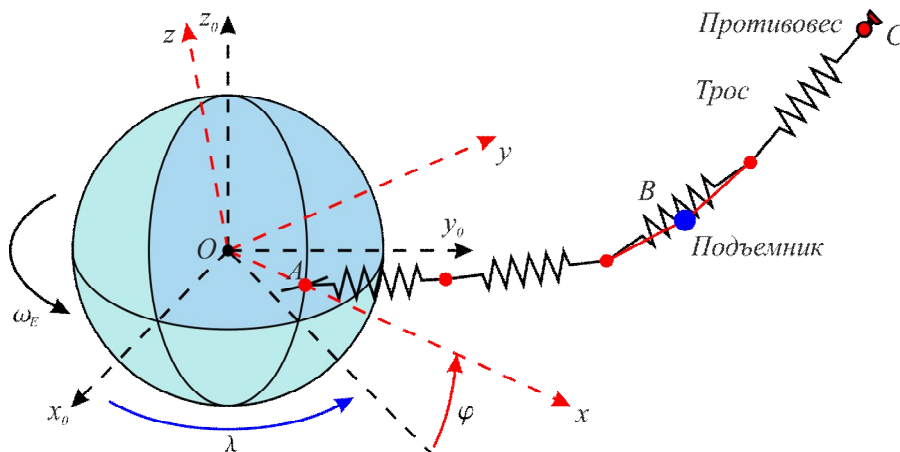


Рис. 1. Многоточечная модель космического лифта

Индекс 0 соответствует точке крепления троса к Земле  $A$ :  $\mathbf{r}_0 = (R_E, 0, 0)^T$ , где  $R_E$  – экваториальный радиус Земли. Индексы  $1..N$  – тросу,  $N + 1$  – противовесу  $C$ ,  $N + 2$  – подъёмнику  $B$ .

Движение подвижной системы координат  $Oxyz$  относительно  $Ox_0y_0z_0$ , определяется вектором угловой скорости вращения Земли, в системе  $Oxyz$  он имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_E (\sin \varphi, 0, \cos \varphi)^T, \quad (2)$$

где  $\omega_E$  – угловая скорость вращения Земли;  $\varphi$  – угол, определяющий широту расположения точки крепления лифта;

$\omega_E$  и  $\varphi$  считаем постоянными.

Абсолютная скорость  $j$ -ой точки в подвижной системе координат будет определяться по следующей формуле [20]:

$$\mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j, \quad (3)$$

Абсолютное ускорение  $j$ -ой точки равно

$$\mathbf{a}_j = \ddot{\mathbf{r}}_j + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_j) + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_j) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j). \quad (4)$$

Подставляя формулы (1) и (2) поочередно в (3) и (4), получим:

$$\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} \dot{x}_j - \omega_E y_j \cos \varphi \\ \dot{y}_j + \omega_E x_j \cos \varphi - \omega_E z_j \sin \varphi \\ \dot{z}_j + \omega_E y_j \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} \ddot{x}_j - \omega_E^2 x_j \cos^2 \varphi + \omega_E^2 z_j \cos \varphi \sin \varphi - 2\omega_E \dot{y}_j \cos \varphi \\ \ddot{y}_j - \omega_E^2 y_j + 2\omega_E (\dot{x}_j \cos \varphi - \dot{z}_j \sin \varphi) \\ \ddot{z}_j - \omega_E^2 z_j \sin^2 \varphi + \omega_E^2 x_j \cos \varphi \sin \varphi + 2\omega_E \dot{y}_j \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Используя общее уравнение динамики [20], уравнения движения троса можно записать в следующем виде:

$$\ddot{\mathbf{r}}_j = \frac{1}{m_j} (\mathbf{F}_j^s + \mathbf{F}_j^g) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_j) - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j)), \quad (5)$$

где  $j = 1, N$ ,  $m_j$  – масса  $j$ -ого сегмента троса;  $\mathbf{F}_j^s$  – сила натяжения;

$\mathbf{F}_j^g$  – сила гравитационного воздействия Земли [12].

## 1.2. Распределение массы вдоль троса

Конструкция космического лифта предполагает использование троса переменного поперечного сечения, что позволяет минимизировать его массу, обеспечив необходимую прочность. В модели это учитывается тем, что масса сегментов троса разная. Для её определения запишем выражение для массы, зависящий от расстояния до конца троса:

$$m(s) = \bar{\rho} A(s),$$

где  $\bar{\rho}$  – средняя плотность материала троса;  $A(s)$  – функция площади поперечного сечения троса, зависящая от расстояния до конца троса [3]. Она определяется по формуле:

$$A(s) = A_m \exp \left[ \frac{\bar{\rho} g_0 R_E}{\sigma R_G} \left( \frac{3}{2} - \frac{R_G}{s + R_E} - \frac{(s + R_E)^2}{2R_G^2} \right) \right], \quad (6)$$

где  $R_E$  – экваториальный радиус Земли;  $R_G$  – радиус геостационарной орбиты.

Рассмотрим участок троса, представленный на рис. 2. Массу  $j$  точки будем определять как интеграл от функции (6), взятый по параметру  $s$  в пределах  $[jl_j, (j-1)l_j]$ , ( $j = 1, N + 1$ ).

$$m_j = \int_{(j-1)l_j}^{jl_j} m(s) ds, \quad (j = 1, N + 1),$$

где  $l_j = l / (N + 1)$  – начальная длина одного сегмента троса после разбиения его на части. Предполагается, что масса рассчитывается для ненагруженного троса, когда его длина соответствует недеформированной длине троса  $l$ . Масса последнего  $N$ -го сегмента троса добавляется к массе противовеса  $C$ .

За площадь поперечного сечения  $A_j$   $j$ -ого сегмента троса будем принимать значение площади, вычисленное в центре этого сегмента (рис. 2).

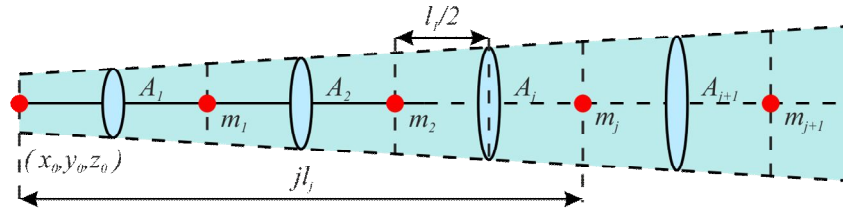


Рис.2. Распределение массы троса

То есть в формуле (6) будем использовать значение параметра  $s = jl_j - l_j / 2$  – расстояние от точки закрепления троса к Земле до середины  $j$  сегмента для ненагруженного троса.

### 1.3. Силы, действующие на точки троса

Вектор, определяющий смещение  $j$  точки относительно  $j-1$ , в подвижной системе координат  $Oxyz$  имеет вид:

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j-1}$$

Удлинение  $j$ -ого элемента троса:

$$\delta_j = \begin{cases} (|\mathbf{q}_j| - l_j) / l_j, & |\mathbf{q}_j| \geq l_j, \\ 0, & |\mathbf{q}_j| < l_j, \end{cases} \quad (7)$$

где  $j = 1, N + 1$ , а нумерация сегментов начинается с 1.

Первый сегмент соединяет точку крепления троса к земле  $(x_0, y_0, z_0)$  и первую точку троса  $(x_1, y_1, z_1)$ , последний – конечную точку троса  $(x_N, y_N, z_N)$  и противовес  $(x_{N+1}, y_{N+1}, z_{N+1})$ .

С учетом (6) сила упругости в  $j$  элементе троса будет определяться как:

$$T_j = EA_j \delta_j + C \dot{\delta}_j,$$

где первое слагаемое отвечает за упругость, а второе – за демпфирование;

$E$  – модуль Юнга для материала троса;

$C$  – коэффициент демпфирования.

Трение между волокнами в тросе приводит к возникновению силы демпфирования, которая стремится погасить продольные колебания троса. Она неизбежно возникает

при деформации троса, и для полноты анализа её следует учитывать. Демпфирование пропорционально скорости деформации, вычисляемой как производная по времени от величины деформации (7):

$$\dot{\delta}_j = \frac{\dot{\mathbf{q}}_j \cdot \mathbf{q}_j}{|\mathbf{q}_j| l_j}$$

Суммарная сила натяжения, действующая на  $j$  точку, складывается из силы натяжения, действующей на сегмент троса  $j$  и  $j+1$ , с учётом знаков будет иметь следующий вид [9]:

$$\mathbf{F}_j^s = T_{j+1} \frac{\mathbf{q}_{j+1}}{|\mathbf{q}_{j+1}|} - T_j \frac{\mathbf{q}_j}{|\mathbf{q}_j|}, \quad (j = 1, N) \quad (8)$$

В рамках модели рассматривается центральное Ньютоновское гравитационное поле. В этом случае сила гравитационного воздействия Земли, действующая на  $j$  точку троса, будет определяться формулой:

$$\mathbf{F}_j^g = -\mu \frac{m_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \mathbf{r}_j, \quad (9)$$

где  $\mu$  – гравитационный параметр Земли.

Подставляя силы (8) и (9) в систему (5), получим систему дифференциальных уравнений, описывающую движение троса.

### 1.4. Уравнения движения противовеса

Движение противовеса будет описываться уравнением:

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \frac{1}{m_c} (\mathbf{F}_c^s + \mathbf{F}_c^g) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_c) - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c)) \quad (10)$$

где  $\mathbf{F}_C^s$  – сила натяжения, действующая со стороны троса;  
 $\mathbf{F}_C^g$  – сила тяжести.

Эти силы определяются формулами:

$$\mathbf{F}_C^s = -T_{N+1} \frac{\mathbf{q}_{N+1}}{|\mathbf{q}_{N+1}|},$$

$$\mathbf{F}_C^g = -\mu \frac{m_C}{|\mathbf{r}_C|^3} \mathbf{r}_C,$$

где  $\mathbf{r}_C$  – радиус вектор противовеса во вращающейся системе координат;

$m_C$  – масса противовеса, которая складывается из массы самого противовеса и массы последнего сегмента троса.

Системы (5) и (10) составляют замкнутую систему дифференциальных уравнений движения космического лифта без учёта подъёмника.

### 1.5. Уравнения движения подъёмника

Движение подъёмника будет описываться уравнением:

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = \frac{1}{m_B} (\mathbf{F}_B^N + \mathbf{F}_B^f + \mathbf{F}_B^P + \mathbf{F}_B^g) - 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_B) - (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B)), \quad (11)$$

где  $m_B$  – масса подъёмника;

$\mathbf{F}_B^N$  – сила реакции троса;

$\mathbf{F}_B^f$  – сила трения;

$\mathbf{F}_B^P$  – движущая сила;

$\mathbf{F}_B^g$  – сила гравитационного воздействия Земли.

Уравнение (11) строится по схеме, предложенной в работе [12].

Пусть подъёмник находится на  $j$  сегменте троса (рис. 3). При его движении вдоль троса происходит деформация последнего. Вектора  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  определяются на основе текущего положения подъёмника в системе  $Oxyz$ ;  $\mathbf{p}_1$  – соединяет  $j+1$  точку троса и подъёмник,  $\mathbf{p}_2$  – подъёмник и  $j$  точку. Данные вектора можно найти по формулам [12]:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{j+1}. \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_B. \end{cases}$$

Для определения реакции, силы трения и движущей силы используется нормальная  $B\mathbf{n}b$ , спрямляющая  $B\boldsymbol{\tau}b$  и соприкасающаяся с  $B\boldsymbol{\tau}n$  плоскостью [12]. При определении данных сил для удобства будем проектировать их на оси естественной системы координат [12]  $B\boldsymbol{\tau}n\mathbf{b}$  (рис. 3). Здесь  $\mathbf{b}$  – единичный вектор бинормали,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали,  $\boldsymbol{\tau}$  – единичный вектор касательной, определяются формулами [9]:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2}{|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_B}{|\mathbf{n}_B|}, \quad \mathbf{n}_B = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{p}_1}{|\mathbf{b} \times \mathbf{p}_1|} + \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{p}_2}{|\mathbf{b} \times \mathbf{p}_2|} \right), \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{b} \times \mathbf{n}|}.$$

Подъёмник деформирует  $j$  сегмент троса, меняя тем самым значение силы натяжения на этом участке. Изменённое натяжение будет рассчитываться следующим образом:

$$T_e = \frac{EA_m}{l_j} (|\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2| - l_j) \quad (12)$$

Это значение предполагается постоянным по всему локальному сегменту лифта.

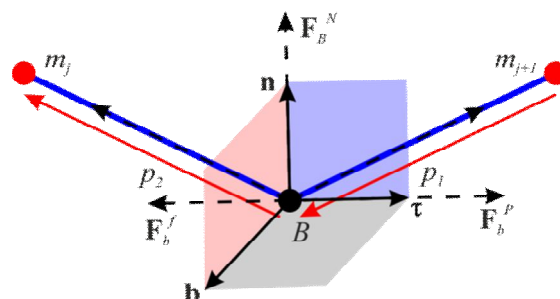


Рис.3. Сегмент троса с подъёмником

Формула (12) должна применяться для определения силы натяжения используемых в уравнениях соседних с подъёмником точек троса. Суммарная реакция троса на подъёмник будет определяться двумя компонентами вектора силы натяжения:

$$\mathbf{F}_B^N = -T_e \left( \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{p}_1|} - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{p}_2|} \right) \mathbf{n} \quad (13)$$

Реакция троса на подъёмник проецируется на направление нормального вектора. Когда напряжение в сегменте равно нулю, реакция отсутствует. Кроме того, реакция равна нулю, если вектора  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  параллельны, то есть сегмент не деформирован.

При движении подъёмника возникает сила трения, деформирующая трос. Она действует по касательной к тросу по направлению вектора  $\boldsymbol{\tau}$ . Отметим тот факт, что в рамках данной работы подъёмник рассматривается только во время движения вдоль троса. В этом случае сила трения определяется формулой:

$$F_{\max} = \mu_k \left| \mathbf{F}_B^N \right|, \quad (14)$$

где  $\mu_k$  – коэффициент трения между тросом и подъёмником.

Окончательный вид силы трения определяется формулой:

$$\mathbf{F}_B^f = -\text{sign}(\mathbf{v}_B \cdot \boldsymbol{\tau}) F_{\max} \boldsymbol{\tau}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{v}_B$  – вектор относительной скорости движения подъёмника вдоль троса. Сила трения направлена вдоль вектора  $\boldsymbol{\tau}$ .

### 1.6. Уравнения движения соседних с подъёмником точек троса

Наличие подъёмника на  $j$  сегменте троса приводит к необходимости внесения изменений в уравнения движения соседних с ним  $j$  и  $j+1$  точек. Во-первых, следует изменить выражения для сил натяжения, действующих на эти точки. Во-вторых, для данных точек необходимо добавить силу тре-

ния, действующую на трос со стороны подъёмника.

Для этих точек сила натяжения троса будет определяться следующими соотношениями:

$$\mathbf{F}_j^s = T_e \frac{\mathbf{p}_2}{|\mathbf{p}_2|} - T_j \frac{\mathbf{q}_j}{|\mathbf{q}_j|} + \mathbf{F}_j^f + \mathbf{F}_B^g + \mathbf{F}_B^k + \mathbf{F}_B^c, \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_{j+1}^s = T_{j+1} \frac{\mathbf{q}_{j+1}}{|\mathbf{q}_{j+1}|} + T_e \frac{\mathbf{p}_1}{|\mathbf{p}_1|} + \mathbf{F}_{j+1}^f + \mathbf{F}_B^g + \mathbf{F}_B^k + \mathbf{F}_B^c, \quad (17)$$

где  $\mathbf{F}_j^f$  и  $\mathbf{F}_{j+1}^f$  – силы трения для  $j$  и  $j+1$  точек, которые определяются следующими формулами:

$$\mathbf{F}_j^f = -\frac{|\mathbf{p}_1|}{|\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2|} \frac{\mathbf{q}_j}{|\mathbf{q}_j|} \left| \mathbf{F}_B^f \right|, \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_{j+1}^f = -\frac{|\mathbf{p}_2|}{|\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2|} \frac{\mathbf{q}_{j+1}}{|\mathbf{q}_{j+1}|} \left| \mathbf{F}_B^f \right|. \quad (19)$$

Отметим, что в отличие от работы [9], в формулах (16) и (17) добавлены силы инерции Кориолиса  $\mathbf{F}_B^k = -2m_B (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_B)$  и центробежная сила инерции  $\mathbf{F}_B^c = -m_B \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_B$ , действующие на трос со стороны подъёмника.

Собирая  $3N$  уравнений для точек троса и добавляя к ним три уравнения от подъёмника и 3 от противовеса, получим замкнутую систему из  $3(N+2)$  дифференциальных уравнений, описывающих динамику космического лифта с учётом движения подъёмника.

### 1.7. Особенности моделирования движения подъёмника

При подходе подъёмника к  $j+1$  точке величина модуля вектора  $\mathbf{p}_1$  уменьшается, а при прохождении через точку он обращается в ноль (рис. 4). Это создаёт проблему, поскольку из формул (13)–(19) видно, что модуль вектора  $\mathbf{p}_1$  входит в знаменатель, и в этом случае возникает неопределённость. Подобная ситуация происходит и после прохождения подъёмника  $j+1$  точки, в этом случае малой величиной становится модуль вектора  $\mathbf{p}_2$ .

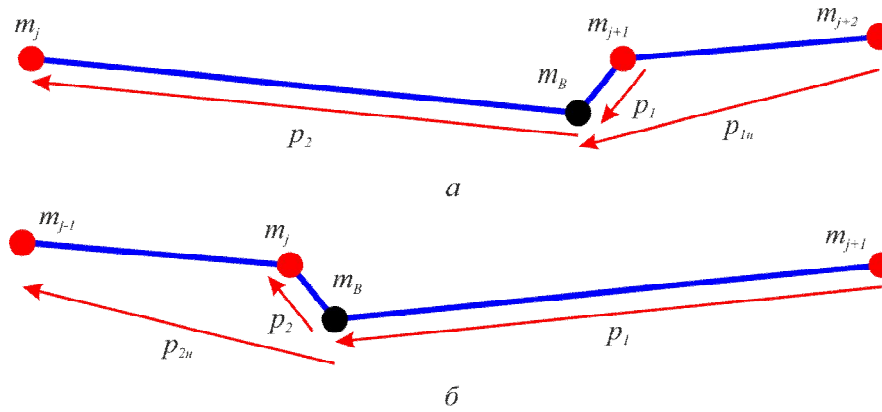


Рис. 4. Подход/отход подъемника к точкам троса

Для решения данной проблемы будем отслеживать подход/отход подъемника к точкам троса, а также момент выполнения одного из условий:

$$|p_1| < \varepsilon, |p_2| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – величина, определяемая из требуемой точности расчётов.

Поменяем вектора  $p_1$  и  $p_2$  на вспомогательные вектора  $p_{1n}$  и  $p_{2n}$  (рис. 4). Такой подход позволяет избежать появления нулей в знаменателе, а следовательно, и появления ошибок при численном моделировании. Предложенный подход отличает данную модель от работы [12], в рамках которой предлагалось удалять точки, фактически разбивать заново трос при подходе подъемника к точке троса, что приводит к дополнительным возмущениям системы за счёт перераспределения массы. Это может сильно сказываться на результате при моделировании троса небольшим числом точек.

### 1.8. Кинематический способ задания движения подъемника вдоль троса

Движение подъемника в данной работе задается кинематическим законом. В этом случае необходимо заменить уравнения движения подъемника следующим уравнением:

$$r_B = -r_B(t) \frac{p_1}{|p_1|},$$

где  $r_B(t)$  – заданный кинематический закон движения подъемника вдоль троса.

Знак минус выбран из-за того, что вектор  $p_1$  направлен в противоположную движению подъемника сторону. Учитывая введенный кинематический закон, движущая сила подъемника  $F_B^P$  может быть определена так:

$$F_B^P = -m_B \left( r_B(t) \frac{p_1}{|p_1|} \right)'' + (F_B^N + F_B^f + F_B^g) + 2m_B (\omega \times r_B) + m_B (\omega \times (\omega \times r_B))$$

### 2. Анализ влияния движения подъемника на динамику лифта

Будем рассматривать космический лифт, имеющий следующие параметры: средняя плотность материала троса  $\bar{\rho} = 1300$  кг/м<sup>3</sup>, предел прочности  $\sigma = 35$  ГПа, модуль Юнга  $E = 630$  ПА. Длина недеформированного троса  $l = 1,44 \times 10^8$  м, максимальная площадь поперечного сечения  $A_m = 10$  мм<sup>2</sup>, масса противовеса 30 000 кг, масса подъемника  $m_B = 1000$  кг. Примем величину  $\varepsilon = 1$  м.

Для моделирования троса используем  $N = 10$  точек. То есть трос будет разделён на 11 сегментов. Начальным положением троса будет его стационарное состояние, которое определено уравнениями (5) и (10) путём подстановки в них первых и вторых производных, которые равны нулю, а также решения получившейся системы относительно  $x_j$  ( $j = 1, N + 1$ ).

Для заданных параметров полная масса троса составила  $1197,1 \cdot 10^3$  кг. Полученное

значение соответствует значениям, приводимым в работе [12]. Отметим, что к массе противовеса добавляется масса последнего сегмента, и при данных параметрах его масса  $m_C = 34790 + 30000 = 64790$  кг.

В качестве  $r_B(t)$  будем использовать закон, использованный в работах [18, 19], согласно которому подъемник движется с постоянной скоростью 50 м/с. В начале и конце восхождения он разгоняется либо тормозится до заданных значений скоростей.

### 2.1. Сравнение результатов с двухзвенной моделью

Проведём сравнение результатов, полученных с помощью многоточечной модели и модели, описанной в работах [18, 19]. Параметры системы выберем одинаковыми, указанными выше. В случае многоточечной модели, стационарному положению лифта соответствует растянутое состояние троса, то есть начальная длина троса будет отличаться от длины используемой в двухзвенной модели. Для сравнения будем использовать разбиение на  $N = 10$  точек, длина троса в начальный момент времени для этого случая

будет равна  $1,529 \times 10^8$  м. Временной интервал моделирования движения составит в обоих случаях 34 дня. Будем рассматривать экваториальный лифт,  $\varphi = 0$ .

Для сравнения будет рассчитывать на основании положения подъемника и противовеса в подвижной системе координат  $Oxyz$ , значения углов отклонения от местной вертикали:  $\alpha_1$  – для подъемника,  $\alpha_2$  – для противовеса (рис. 5).

На рис. 6–7 приведены графики зависимости углов  $\alpha_1, \alpha_2$  от времени  $t$ , для многоточечной – линия *a* и двухзвенной [18, 19] – *b* модели. На рис. 8 приведён график изменения относительной длины троса от времени.

Из рис. 6–7 видно, что, с одной стороны, амплитуды колебаний космического лифта в обоих случаях сопоставимы, а с другой, – характер колебаний существенно различается. Различия обусловлены влиянием силы Кориолиса на точки троса, масса которых в рассматриваемом примере существенно превосходит массу противовеса.

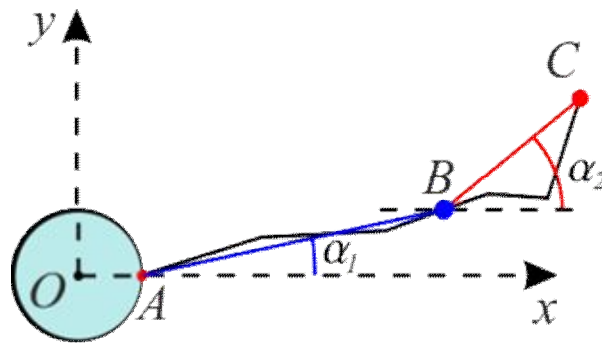


Рис. 5. Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (пояснения в тексте)

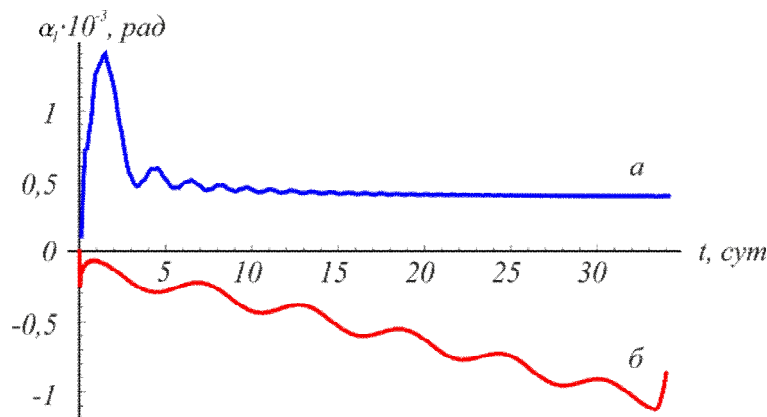


Рис. 6. График изменения угла  $\alpha_1$  (пояснения в тексте)



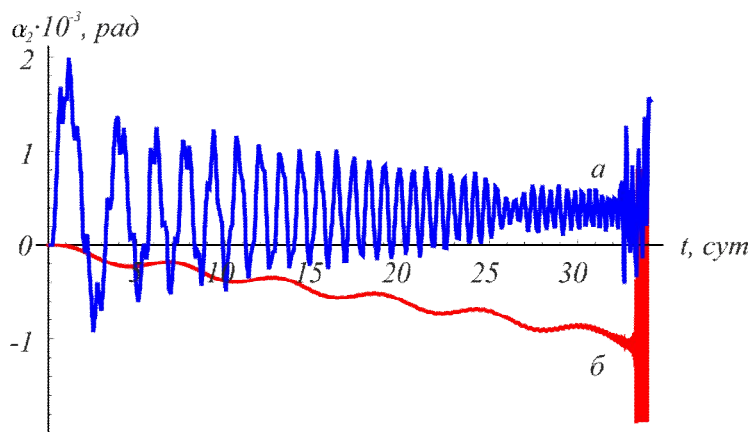


Рис. 7. График изменения угла  $\alpha_2$  (пояснения в тексте)

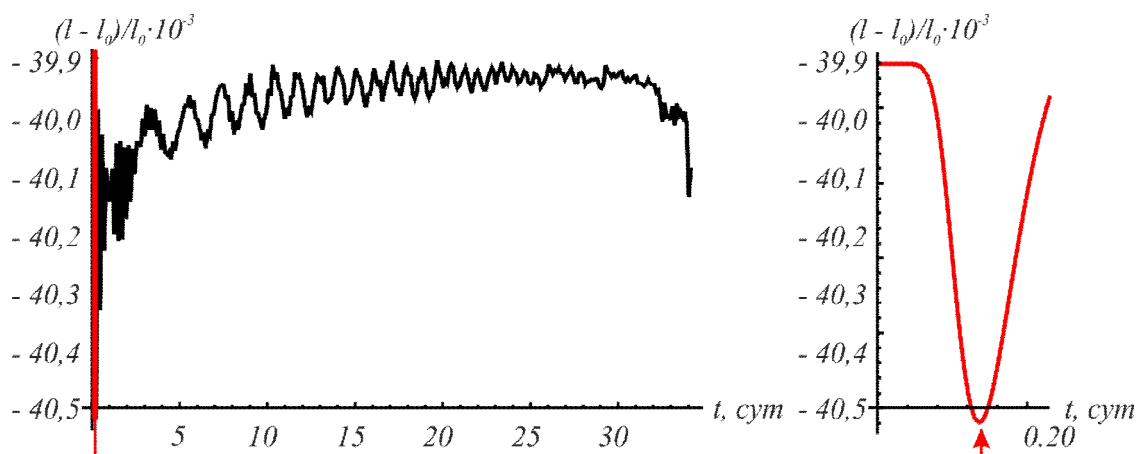


Рис. 8. График изменения относительной длины троса (пояснения в тексте)

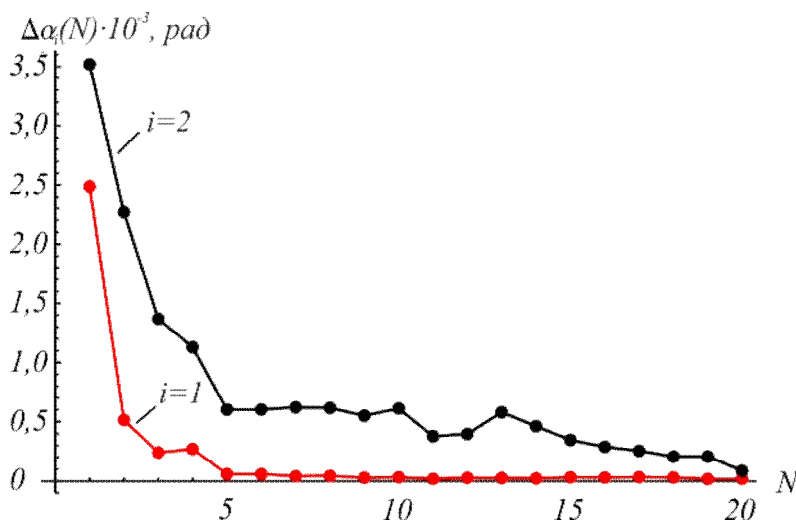


Рис.9. График зависимости  $\Delta\alpha_i(N)$ ,  $(i=1,2)$  от числа  $N$  (пояснения в тексте)

Из рис. 8 видно, что движение подъемника приводит к возникновению продольных колебаний в тросе. Сила Кориолиса переводит эти колебания в поперечную плоскость. Двухзвенная модель [18; 19] не учитывает описанные эффекты.

## 2.2. Исследование влияния числа точек на колебания космического лифта

Исследуем влияния числа точек, используемых для моделирования троса, на колебания космического лифта. Для этого рассмотрим космический лифт с параметрами

приведенными выше, варьируя число точек троса  $N = 1..20$ , с шагом 1. Для сравнения результатов, для углов  $\alpha_1, \alpha_2$  будем вычислять абсолютную погрешность:

$$\Delta\alpha_i(N) = \max_t \left( \left| \alpha_{iN}(t) - \alpha_{i(N-1)}(t) \right| \right), \quad i = 1, 2$$

Графики зависимости  $\Delta\alpha_i(N), (i = 1, 2)$  от величины  $N$  представлены на рис. 9, из которого видно, что с ростом числа точек  $N$  величина  $\Delta\alpha_i(N), (i = 1, 2)$  убывает. Данный рисунок позволяет определить необходимое число точек троса, исходя из требуемой точности расчёта. Неравномерность графиков при малых  $N$  указывает на то, что внесение дополнительной точки сильно сказывается на изменении геометрии всей системы.

### Заключение

В работе построена математическая модель, описывающая динамику космического лифта с учётом движения подъёмника. Трос был представлен как набор материальных точек, соединённых невесомыми упругими стержнями. В модели учтена переменная площадь поперечного сечения троса. Проведено исследование динамики космического лифта с учётом движения подъёмника.

Результаты показывают, что равномерное восхождение подъёмника приводит к возникновению поперечных колебаний в тросе. Было проведено сравнение полученных результатов с полученными нами ранее [18; 19]. Установлено, что амплитуда колебаний в обоих случаях сопоставима, но картина колебаний отличается. Отличия связаны с упругостью троса, которая учитывается в многоточечной модели. Движение подъёмника приводит к возникновению продольных колебаний в тросе, которые, благодаря воздействию силы инерции Кориолиса, приводят к его раскачке в поперечном направлении.

Исследовано влияние числа точек, используемых для моделирования троса, на точность полученных результатов. Получен график зависимости абсолютной погрешности углов  $\alpha_1, \alpha_2$  от числа точек моделирующего троса.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (15-01-01456 А).

### Литература

1. Aslanov V. S., Ledkov A. S. Dynamics of the tethered satellite system. Cambridge: Wood-head Publishing Limited. 2012. 331 p.
2. Белецкий В. В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
3. Pearson J. The orbital tower: a spacecraft launcher using the Earth's potential energy // Acta Astronautica. 2010. Vol. 2. № 9–19. P. 785–799.
4. Smitherman D. V. Jr. Space elevator: an advanced Earth – space infrastructure for the millennium. NASA/CP-2000-210429. 2000. 48 p.
5. Edwards B. C. The space elevator. NIAC Phase Final Report. 2003. 43 p.
6. Садов Ю. А., Нуралиева А. Б. О концепции нагруженного секционированного космического лифта // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2011. № 39. С. 1–24.
7. Садов Ю. А., Нуралиева А. Б. Нелинейные поперечные колебания троса космического лифта // Математическое моделирование. 2011. Т. 23. № 12. С. 3–19.
8. Садов Ю. А., Чернов А. В. Исследование равновесных форм гибкого нерастяжимого троса с учётом гравитационных и аэродинамических факторов // Модели и методы обработки информации: сб. ст. М.: МФТИ, 2009. С. 1–4.
9. Jung W., Mazzoleni A. P., Chung J. Dynamics analysis of a tethered satellite system with a moving mass // Nonlinear Dynamics. 2014. Vol. 75. № 1. P. 267–281.
10. Kojima H., Sugimoto Y., Furukawa Y. Experimental study on dynamics and control of tethered satellite systems with climber // Acta Astronautica. 2011. Vol. 69. № 1–2. P. 96–108.
11. Cohen S. S., Misra A. K. The effect of climber transit on the space elevator dynamics // Acta Astronautica. 2009. № 64. № 5–6. P. 538–553.
12. Williams P. Dynamic multibody modeling for tethered space elevators // Acta Astronautica. 2009. Vol. 65. № 3–4. P. 399–422.
13. Williams P., Ockels W. Climber motion optimization for the space elevator // Acta

Astronautica. 2010. Vol. 66. № 9–10. P. 1485–1467.

14. Woo P., Misra A. K. Dynamics of partial space elevator with multiple climbers // Acta Astronautica. 2010. Vol. 67. № 7–8. P. 753–763.

15. Dynamics of space elevator after tether rupture / V. S. Aslanov, A. S. Ledkov, A. K. Misra [et al.] // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. Vol. 36. № 4. P. 986–992.

16. Сазонов В. В. Математическое моделирование развертывания тросовой системы с учётом массы троса // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2006. С. 1–36.

17. Burov A., Kosenko I. On planar oscillations of a body with a variable mass distribution in an elliptic orbit // Journal of Mechanics Engineering Science. 2011. Vol. 225. № 10. P. 2288–2295.

18. Ледков А. С., Пикалов Р. С. Исследование влияния движения подъёмника на динамику космического лифта // Наука и Образование. 2014. № 5. С. 206–216.

19. Пикалов Р. С. Исследование влияния движения подъёмника на динамику неэкваториального космического лифта // Труды МАИ. 2015. № 79. С. 1–16.

20. Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо. 1999. 569 с.

## SIMULATION OF THE SPACE ELEVATOR'S OSCILLATIONS DURING PAYLOAD LIFTING INTO ORBIT

A. S. Ledkov, R. S. Pikalov

The multipoint mathematical model of the nonequatorial space elevator was developed for studying of the system's motion. The climber and the space station were modeled as mass points. The tether was considered as a chain of mass points which were interconnected by weightless elastic rods. It was shown that motion of the climber leads to transverse oscillations of the space elevator. Comparison of the results of the multipoint model and the previously published two-tier model was carried out. It is shown that the vibration pattern substantially different. Motion of the climber causes longitudinal oscillations in the tether, which due to the effect of the Coriolis forces of inertia lead to tether's buildup in the transverse direction. A two-tier model cannot account for these phenomena. Effect of the number of the tether's points on the accuracy of the results was investigated.

**Key words:** Space elevator, tether, climber, multipoint mathematical model, line density.

*Статья поступила в редакцию 09.07.2016 г.*

---

© Ledkov A. S., Pikalov R. S., 2016.

Ledkov Alexander Sergeevich

(ledkov@inbox.ru),

assistant professor

of the Theoretical Mechanics Department;

Pikalov Ruslan Sergeevich

(pickalovrs@gmail.com),

postgraduate student

of the Theoretical Mechanics Department

of the Samara University,

443086, Russia, Samara, Moskovskoye Shosse, 34.