

ЭКОНОМИКА И МЕНЕДЖМЕНТ

УДК 519.87

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕВОЗОК НЕСКОЛЬКИМИ ВИДАМИ ТРАНСПОРТА

А. Д. Иванова

В статье предлагается оптимизационная модель организации перевозок продукции на транспортной сети с использованием различных типов транспорта. Предполагается, что вид используемого транспорта может меняться в промежуточных узлах маршрута, в отличие от траппланарной задачи в классической постановке. Модель также учитывает такие особенности сетевых перевозок, как невозможность использования части маршрутов сети для некоторых видов транспорта, разные затраты на перевозку для разных транспортных средств и дополнительные затраты на перегрузку продукции с одного транспорта на другой. Под решением в модели понимается нахождение оптимального плана перевозок товара или корреспонденций со складов (источников) к потребителям (стокам) с минимальными денежными или временными затратами. Для решения задачи разработан и формализован алгоритм построения специального многослойного графа с единственными источником и стоком и количеством слоёв, соответствующим количеству типов транспорта в задаче. Данный алгоритм позволяет найти оптимальное решение с помощью стандартных методов поиска потока заданной величины минимальной стоимости, таких как алгоритмы Басакера-Гоуэна или Клейна.

Ключевые слова: линейное программирование, математические модели логистики, многоиндексная транспортная задача, многослойный граф, поток заданной величины минимальной стоимости, потоки в сетях.

Задача планирования перевозок на транспортной сети несколькими видами транспорта предполагает возможность выбора транспорта для каждого маршрута перевозки товара от конкретного источника к определённому потребителю и его смены в процессе осуществления перевозки, а также учёт связанных с этим издержек, что отличает её от известной в литературе трипланарной транспортной задачи [1]. Такая постановка задачи описывает реальную ситуацию, возникающую на производстве, когда из-за особенностей транспортной инфраструктуры невозможно (или невыгодно) доставить товар потребителю одним видом транспорта. Количество различных вариантов организации перевозок затрудняет получение оптималь-

ного плана эмпирическим путём или с помощью экспертных оценок [2]. Это обуславливает необходимость применения математических моделей, методов и вычислительной техники для её решения [3].

Постановка задачи

Пусть планируется перевозка гомогенного делимого товара со складов с известными запасами к магазинам с фиксированными спросами посредством нескольких видов транспорта по транспортной сети с промежуточными вершинами, в которых может происходить выбор и сопряжённая с затратами смена вида транспорта, используемого для перевозки. Задача заключается в отыскании такого плана перевозок, который минимизирует суммарные затраты, обеспечивает спрос магазинов и баланс запасов и вывоза для складов. Модель будет выглядеть следующим образом (формулы 1–5):

$$\sum_{j \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk} + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{p \in K} d_{ikp} y_{ikp} \rightarrow \min \quad (1)$$

© Иванова А. Д., 2016.

Иванова Анастасия Дмитриевна,
(hudoj-nik@mail.ru),

аспирант кафедры математики
и бизнес-информатики

Самарского университета,

443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{jik} - \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} = \begin{cases} -a_i, & \text{если } i \in I_0, \\ 0, & \text{если } i \notin I_0, J_0, \\ b_j, & \text{если } i \in J_0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in K} y_{ikp} = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{jik}, \quad i \notin I_0, \quad (3)$$

$$y_{ikp} \geq 0, \quad (4)$$

$$x_{ikj} \geq 0, \quad (5)$$

где: $I_0 = \{a_i \mid i = \overline{1, n}\}$ – склады,

$J_0 = \{b_j \mid j = \overline{1, m}\}$ – магазины,

a_i – запас на i -ом складе,

b_j – спрос j -ого магазина,

$K = \{k_l\}$ – вид транспорта,

c_{ijk} – тариф на перевозку из i в j транспортом k ,

x_{ijk} – объём перевозки из i в j транспортом k ,

d_{ikp} – тариф на перегрузку в узле i с транспорта p на k ,

y_{ikp} – объём перегрузки в узле i с транспорта p на k .

I, J – множества всех узлов транспортной сети.

Так на графе (рис. 1) из узла $i=2$ в узел $l=2$ можно переместиться только первым типом транспорта, а из узла $l=4$ в узел $l=5$ – только вторым. Здесь сплошными линиями обозначены коммуникации, на которых доступен первый тип транспорта, пунктирными – коммуникации, на которых доступен второй тип транспорта. Для каждой дуги (h, q) и каждого вида транспорта k задан тариф c_{hqk} на перевозку товара по этой дуге транспортом k . Смена транспорта также связана с дополнительными затратами: для каждого узла l и каждой пары (k, p) видов транспорта обозначим эти затраты d_{lkp} .

Построение вспомогательного графа

Для решения поставленной задачи сведём её к задаче о потоке минимальной стоимости [4] на специальном образом построен-

ном вспомогательном графе. Для каждого из K видов транспорта составим отдельный транспортный граф (рис. 2). Будем говорить, что граф для k -го вида транспорта имеет уровень k . Для наглядности на рис. 2 показаны графы для двух типов транспорта k и $p \neq k$. В общем случае получим K таких графов по количеству видов транспорта. Следует оговорить, что вершины l_k и l_p , также как и вершины i_k и i_p, j_k и j_p , географически являются одними и теми же пунктами, а разные графы отражают только возможность перевозки различными видами транспорта k и p .

Построим такие графы для каждого из K видов транспорта. Смена транспорта k на какой-либо другой вид транспорта $p \neq k$ сопряжена с затратами d_{lkp} . Для каждой вершин l , где возможна смена транспорта k на p добавим дополнительную дугу, соединяющую эту вершину графа уровня k с аналогичной вершиной графа уровня p .

Таким образом, если общее количество промежуточных вершин транспортной сети в исходной задаче составляет $L' = L - m - n$, то получим граф с $K \cdot L'$ вершинами, где K – количество различных видов транспорта. Далее присоединим к получившемуся графу n вершин, соответствующих продавцам i , и m вершин, соответствующих покупателям j (рис. 3). Тогда получаем граф, состоящий из $(K \cdot L' + m + n) = \bar{L}$ вершин.

При этом следует отметить, что на пропускные способности дуг, которые ведут от продавцов к промежуточным вершинам, нужно наложить ограничения вида (6), которые означают, что нельзя вывести больше товара, чем есть у продавца.

$$\sum_{l=1}^{\bar{L}} x_{il} \leq a_i, \quad \forall i \in I \quad (6)$$

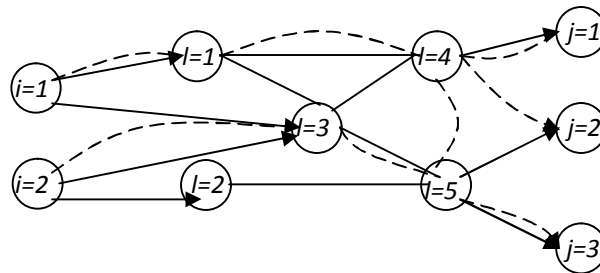


Рис. 1. Транспортная сеть с возможностью изменения вида транспорта: l – промежуточные пункты транспортной сети, i – продавцы, j – покупатели (объяснения в тексте)

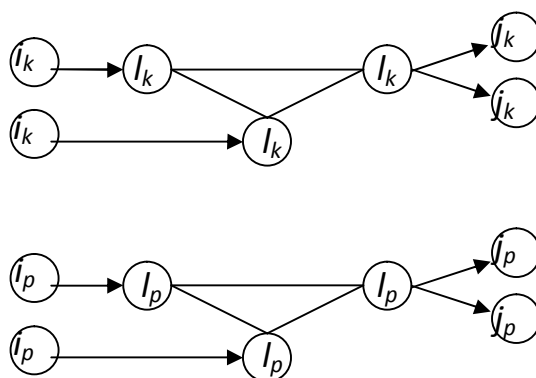


Рис. 2. Графы для двух видов транспорта (объяснения в тексте)

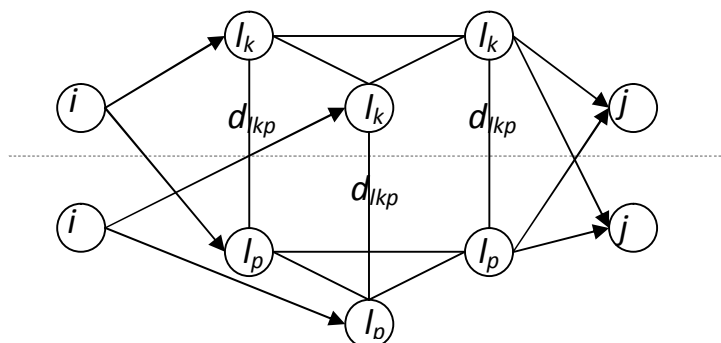


Рис. 3. Вспомогательный граф для двух видов транспорта (объяснения в тексте)

Аналогичные ограничения накладываются на те дуги, которые соединяют промежуточные пункты с потребителями. Так как задача строится на графе, необходимо ввести условие баланса: для промежуточных вершин сумма всех входящих в них потоков должна быть равна сумме выходящих из них потоков [5]. Но для продавцов и потребителей сохраняется условие полного насыщения спроса и вывоза всего объёма товаров. Таким образом, условия задачи могут быть записаны в виде (7):

$$\sum_h x_{lh} - \sum_q x_{lk} = \begin{cases} a_i, & l \in I, \\ 0, & l \notin I, J, \quad l = \overline{1, l}, \\ b_j, & l \in J, \end{cases}$$

$$x_{hq} \geq 0. \tag{7}$$

Ко всем продавцам искусственно присоединяют источник S , причём цены на транспортировку из источника к продавцам будут нулевыми, а пропускные способности дуг равны a_i . Аналогично вводится сток T , который соединён со всеми покупателями, транспортные тарифы здесь опять же равны нулю, а пропускные способности дуг равны b_j . Пропускные способности всех остальных

дуг равны 0. Веса дуг для графов отдельных уровней равны транспортным тарифам c_{hqk} . Остальным дополнительным дугам придаются веса d_{lkp} , равные затратам на смену вида транспорта в узле. Исходная задача эквивалентна задаче о потоке минимальной стоимости заданной величины из фиктивного источника S в фиктивный сток T на построенном графе.

Задача о потоке минимальной стоимости

Необходимо найти поток из источника S в сток T , имеющий заданную величину v и обладающий минимальной стоимостью. Тогда ограничения на пропускные способности будут иметь только дуги, которые идут от источника к продавцам и от покупателей к стоку, то есть пропускные способности дуг из источника s к i -ому продавцу равны его запасу a_i , а пропускная способность дуги от j -ого потребителя к стоку t равна его спросу b_j . Для всех остальных дуг, соединяющих промежуточные вершины между собой и с продавцами, и потребителями, пропускные способности будут бесконечны, как указано в формулах (8–10):

$$e_{si} = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{8}$$

$$e_{si} = a_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

$$e_{jt} = b_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (9)$$

$$e_{qh} = \infty, \quad q \neq s, \quad h \neq t. \quad (10)$$

Формально задача ставится следующим образом (формула 11):

$$\sum_h \sum_q c_{hq} x_{hq} \rightarrow \min,$$

$$\sum_h x_{hl} - \sum_q x_{lq} = \begin{cases} -v, & l = s, \\ 0, & l \neq s, t, \quad l = \overline{1, L}, \\ v, & l = t, \end{cases}$$

$$0 \leq x_{hq} \leq e_{hq}. \quad (11)$$

При этом подразумевается, что величина v не превышает величины максимального потока, иначе задача не имеет решения [6]. Будем полагать величину потока равной (формула 12):

$$v = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j. \quad (12)$$

Задача планирования перевозок несколькими видами транспорта, приведённая к виду задачи о потоке минимальной стоимости, строится на графе (рис. 4).

Эквивалентную задачу о потоке минимальной стоимости заданной величины (MCFP) рекомендуется решать алгоритмом Басакера–Гоуэна либо алгоритмом Клейна. В случае применения алгоритма Басакера–Гоуэна скорость работы алгоритма составит $O((L'r+m+n)^2|V|v)$, тогда как при выборе алгоритма Клейна вычислительная сложность составит $O((L'r+m+n)|V|^2C)$ [7; 8].

Результаты численных экспериментов

Экспериментальное применение модели к практическим нуждам транспортировки товара предприятия оптово-розничной торговли показало снижение денежных издержек (совокупности затрат на бензин и почасовую оплату труда) за приемлемое время в разовых экспериментах (табл. 1). Модель была реализована в среде Turbo Delphi как десктопное приложение.

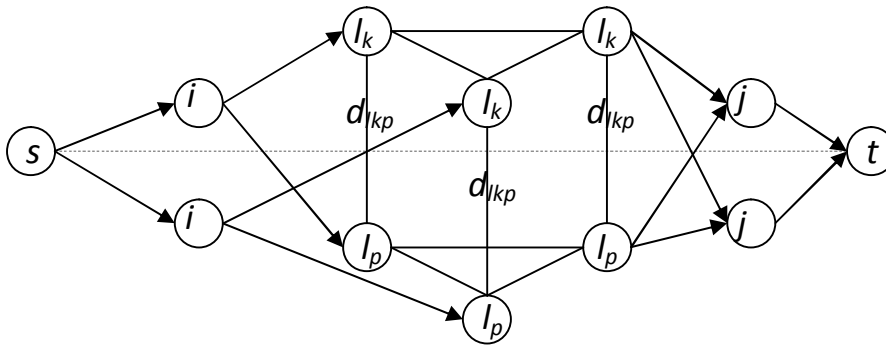


Рис. 4. Задача о потоке минимальной стоимости (объяснения в тексте)

Таблица 1

Результаты применения модели перевозок несколькими видами транспорта

№ п/п	Кол-во складов, шт.	Кол-во магазинов, шт.	Кол-во промежуточных вершин, шт.	Кол-во видов транспорта, шт.	Объём товара, уп.	Процент уменьшения совокупных затрат на перевозку, %	Полное время работы программы, сек.
	n	m	L'	r			
1	1	3	84	2	960	15,06	113
2	3	25	126	2	1 800	17,32	328
3	5	23	183	3	2 950	14,22	453

Исследована модификация модели с наложением дополнительного условия целочисленности на товар. В реальной логистической задаче перевозки товаров с оптовых складов в магазины применение такой модели обеспечило снижение затрат лишь на 0,75–1,02 % по сравнению с уже описанной в литературе моделью и потребовало слишком больших временных и ресурсных затрат рабочих компьютеров, что на настоящий момент затрудняет применение предлагаемой нами модели.

Литература

1. Кириченко И. О., Рискин Г. Л. Многоиндексные задачи линейного программирования (теория, методы, приложения). М.: Радио и связь, 1982. 240 с.
2. Гончаров Е. Н., Ерзин А. И., Залюбовский В. В. Исследование операций. Примеры и задачи. Новосибирск: НГУ, 2005. 78 с.
3. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. 277 с.
4. Монтлевич В. М., Бородинова И. А. О некоторых постановках многопродуктовых транспортных задач // Вестник Самарского государственного университета. 2008. № 66. С. 86–93.
5. Фарафонова Я. В. Оптимизация трехиндексной транспортной задачи // Теория активных систем: тр. Междунар. научно-практ. конф. М.: ИПУ РАН, 2009. Т. II. С. 152–155.
6. Прилуцкий М. Х. Поточковые методы решения многоиндексных задач транспортного типа: дис... д-ра физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2014. 185 с.
7. Kovács P. Minimum-cost flow algorithms: an experimental evaluation // Optimization Methods and Software. 2015. Vol. 30. №. 1. С. 94–127.
8. Катеров А. С. Программная система исследования сводимости многоиндексных задач транспортного типа к потоковым алгоритмам // Технологии Microsoft в теории и практике программирования: матер. конф. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2010. С. 193–195.

MODELING TRANSPORTATIONS BY A SEVERAL TYPES OF TRANSPORT

A. D. Ivanova

The paper proposes optimization model for the organization of transportation of goods in a network, using different types of transport. It is assumed that modes transport may be change during transport in intermediate nodes of a route in contrast to three-index planar problem in the classical formulation. The developed model based on substantial network transportation features: unavailability of road sections for some mode of transport, various transportation costs for different vehicles, and additional costs for transfer of goods. The decision of model is the optimal transportation plan minimizing expenses or time costs. Finding this decision is implemented as a special algorithm for constructing of a multi-layer graph, which contains single source and single sink, and a set of layers corresponding to a set of transport types. This algorithm finds the optimal solution by conventional methods of searching the minimum-cost flow, such as Busacker-Gowen's algorithm and Klein's algorithm.

Key words: Linear Programming, Logistic Mathematical Model, Minimum-Cost Flow Problem, Multi-Index Transport Problem, Multi-Layer Graph, Network Flows.

Статья поступила в редакцию 04.11.2016 г.

© Ivanova A. D., 2016.
Ivanova Anastasiya Dmitrievna,
(hudoj-nik@mail.ru),
postgraduate student of the Mathematics
and Business Informatics Department
of the Samara University,
443086, Russia, Samara, Moskovskoye Shosse, 34.