ФИЗИКА

УДК 530.1+535.371

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В ТРЕХУРОВНЕВЫХ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С КВАНТОВЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ И КЛАССИЧЕСКОЙ НАКАЧКОЙ

Е. К. Башкиров, Т. А. Пузырная

Построена квантовая теория сверхизлучения в трехуровневых системах Λ-типа с учетом накачки произвольной длительности.

Обычно при квантовом описании сверхизлучения влияние процессов когерентной накачки на динамику формирования коллективного импульса не принимается во внимание. Накачка в этом случае выступает в качестве механизма создания инверсной населенности излучателей. При этом предполагается, что эволюция системы излучателей в процессе сверхизлучения начинается из состояния с начальной нулевой макроскопической поляризацией. Такое рассмотрение справедливо, однако, только в том случае, когда длительность импульса накачки значительно меньше времени формирования корреляций между атомами в процессе коллективного излучения. Вместе с тем для большинства известных экспериментов по сверхизлучению (см. ссылки в монографиях [1–6]) такое условие не выполняется. В работах К. Боудена с соавторами [7, 8] и Х. Ли [9] впервые было отмечено, что в условиях, когда длительность импульса накачки превосходит время наведения атомных корреляций, процессы когерентной накачки могут оказать заметное влияние на сверхизлучение. В эксперименте З. Купрениса и В. Швядаса [10] впервые было исследовано сверхизлучение для трехуровневых излучателей Λ-типа (пары натрия) при использовании импульсов накачки с длительностью, значительно превосходящей время сверхизлучения. При этом было показано, что импульс сверхизлучения развивается на переднем фронте возбуждающего импульса накачки. Представляет значительный интерес построить последовательно квантовую теорию сверхизлучения в указанных условиях. Общий подход к решению данной проблемы намечен в цикле наших обзорных статей [11, 12].

Для получения системы кинетических уравнений, описывающих динамику системы трехуровневых атомов Λ-типа, взаимодействующих с квантовым электромагнитным полем и классической накачкой, мы воспользуемся методом исключения бозонных переменных, развитым нами применительно к теории сверхизлучения в ряде работ [13–20]. Рассмотрим систему трехуровневых атомов Λ-типа, взаимодействующих с квантовым электромагнитным полем и классическим полем накачки (рис. 1). Предположим, что частота поля накачки равна частоте перехода между уровнями 1 и 3 в атоме. Мы не будем также принимать во внимание коллективное излучение на этом переходе. Переход между уровнями 1 и 2 будем считать дипольно запрещенным. Гамильтониан такой системы можно выбрать в виде

Башкиров Евгений Константинович (bash@samsu.ru), д.ф.-м.н., профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1.
Пузырная Тамара Анатольевна, студент физического факультета Самарского государственного университета

$$H = H_A + H_F + H_{AF}, (1)$$

где

$$H_A = \sum_{f=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha R_{\alpha\alpha}^{(f)} + \frac{1}{2}\hbar\omega_R(t)\sum_{f=1}^{N}\left\{e^{-i(\omega_0 t - \vec{k}_0\vec{x}_f)}R_{31}^{(f)} + e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0\vec{x}_f)}R_{13}^{(f)}\right\}$$

включает в себя гамильтониан системы N свободных трехуровневых атомов и гамильтониан взаимодействия трехуровневых атомов с классическим электромагнитным полем;

$$H_F = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k -$$

гамильтониан свободного электромагнитного поля и

$$H_{AF} = \sum_{f=1}^{N}\sum_k \hbar g_k\left\{e^{i\vec{k}\vec{x}_f}R_{32}^{(f)}a_k + e^{-i\vec{k}\vec{x}_f}R_{23}^{(f)}a_k^+\right\}$$

гамильтониан взаимодействия трехуровневых атомов с квантовым электромагнитным полем.

Здесь индекс f нумерует трехуровневые излучатели в образце, $\varepsilon_\alpha(\alpha = 1,2,3)$ – энергия уровня α в f-ом трехуровневом атоме; $\omega_{\alpha\beta}$ – частоты разрешенных переходов между уровнями β и α в излучателе ($\beta > \alpha$); $R_{\alpha\alpha}^{(f)}$ – оператор населенности уровня α в атоме f; $R_{\alpha\beta}^{(f)}$ - операторы, описывающие переходы с уровня β на уровень α в излучателе f и удовлетворяющие коммутационным соотношениям вида

$$[R_{\alpha\beta'}^{(f)}, R_{\alpha'\beta'}^{(f')}] = R_{\alpha\beta'}^{(f)}\delta_{\beta\alpha'}\delta_{ff'} - R_{\alpha'\beta}^{(f)}\delta_{\alpha\beta'}\delta_{ff'},$$

$a_k^+(a_k)$ – оператор рождения (уничтожения) фотона с частотой ω_k, волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией $\vec{e}_\sigma$;

$$g_{\alpha\beta}^{(k)} = \omega_{\alpha\beta}\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega_k V}}\vec{d}_{\alpha\beta}\vec{e}_\sigma \quad -$$

константа диполь-фотонного взаимодействия для перехода $\beta - \alpha$ и $d_{\alpha\beta}$ – дипольный момент соответствующего перехода, $\omega_R(t) = E_0(t)d_{13}/\hbar$ – частота Раби для огибающей поля накачки $E_0(t)$, $d_{\alpha 3}$ – матричный элемент оператора дипольного момента для перехода $\alpha - 3$, ω_0 и $\vec{k}_0$ – частота и волновой-вектор поля накачки соответственно.

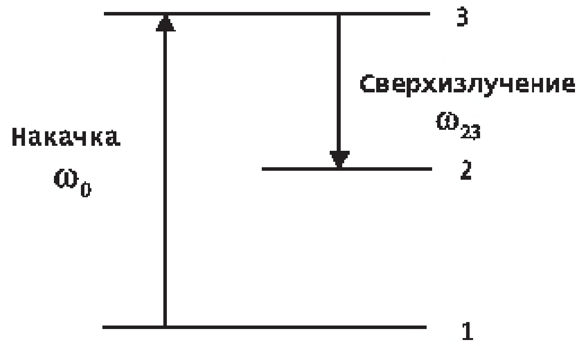

Рис. 1. Схема энергетических уровней и разрешенных переходов в трехуровневом атоме Λ-типа

Гамильтониан рассматриваемой системы (1) можно переписать в терминах коллективных операторов. Пусть вектор $\vec{v}$ соответствует модам в объеме квантования поля V:

$$v_i = 2\pi n_i/L_i; \quad i = x, y, z; \qquad \prod_{f} \prod_{i} = V,$$

где L_i – длина ребра объема квантования и n_i – целое число. Полное число таких мод равно N.

Тогда коллективные атомные операторы можно ввести следующим образом

$$R_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \sum_f R_{\alpha\beta}^{(f)\, i\vec{v}\vec{x}_f} \quad (\alpha > \beta),$$

$$R_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \sum_f R_{\alpha\beta}^{(f)\, -i\vec{v}\vec{x}_f} \quad (\alpha < \beta), (2)$$

$$R_{\alpha\alpha} = \sum_f R_{\alpha\alpha}^{(f)}.$$

Обратные соотношения для коллективных операторов есть

$$R^{(f)}_{\alpha\beta} = \sum_{\nu} R_{\alpha\beta}(\vec{\nu})^{-i\vec{\nu}\vec{x}_f} \quad (\alpha > \beta),$$

$$R^{(f)}_{\alpha\beta} = \sum_{\nu} R_{\alpha\beta}(\vec{\nu})^{i\vec{\nu}\vec{x}_f} \quad (\alpha < \beta).(3)$$

Используя коммутационные соотношения для операторов $R^{(f)}_{\alpha\beta}$ и соотношения (2) и (3), мы можем получить для коллективных операторов коммутационные соотношения следующего вида

$$\left\lfloor R_{\alpha\beta}(\vec{\nu}), R_{\alpha'\beta'}(\vec{\nu}')\right\rfloor = R_{\alpha\beta'}(\vec{\kappa})\delta_{\beta\alpha'} - R_{\alpha'\beta}(\vec{\kappa})\delta_{\alpha'\beta},$$

где

$$\vec{\kappa} = \vec{\nu}S(\alpha,\beta) + \vec{\nu}'S(\alpha',\beta'),$$

$$S(p,q) = \begin{matrix} 1, p \geq q \\ -1, p < q \end{matrix}.$$

Тогда в терминах коллективных операторов гамильтониан (1) можно записать как

$$H = \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_{\alpha} R_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2}\hbar\omega_R(t)\sum_{\nu}\left\{e^{-i\omega_0 t}\phi(\vec{k}_0 - \vec{\nu})R_{31}(\vec{\nu}) + e^{i\omega_0 t}\phi^*(\vec{k}_0 - \vec{\nu})R_{13}(\vec{\nu})\right\} +$$
$$+ \sum_{k}\hbar\omega_k a_k^+ a_k + \sum_{\nu}\sum_{k}\hbar g_k\left\{\phi(\vec{k} - \vec{\nu})R^{(f)}_{32} a_k + \phi^*(\vec{k} - \vec{\nu})R_{23}(\vec{\nu})a_k^+\right\},(4)$$

где $\phi(\vec{\kappa}) = N^{-1}\sum_{f=1}^{N} e^{i\vec{\kappa}\vec{r}_f}$ – геометрический фактор.

Используя метод исключения бозонных переменных, мы можем получить точное кинетическое уравнение для системы с гамильтонианом (4)

$$\frac{d}{dt}\langle O(t)\rangle + (i\hbar)^{-1}\langle[H_A(t), O(t)]\rangle =$$
$$= \sum_{k\nu\nu'} {}_k^2 \int_{-\infty}^{t} d\tau e^{-i\omega_k(t-\tau)}\phi(\vec{k} - \vec{\nu})\phi^*(\vec{k} - \vec{\nu})\langle[R_{32}(\vec{\nu})_t, O(t)]R_{23}(\vec{\nu}')_{\tau}\rangle + h.c.,(5)$$

где $O(t)$ – оператор A – подсистемы в представлении Гейзенберга; операция $\langle\ldots\rangle = Tr(\ldots\rho_{t_0})$ означает усреднение по начальному распределению полной системы. Учитывая малость взаимодействия между атомами и квантовым электромагнитным полем, мы можем использовать для атомных операторов в подынтегральном выражении в правой части уравнения (5) «нулевое приближение» вида

$$R_{23}(\vec{\nu})_{\tau} = R_{23}(\vec{\nu})_t^{\,i\omega_{23}(t-\tau)^{-(t-\tau)/2T}},$$

$$R_{32}(\vec{\nu})_{\tau} = R_{32}(\vec{\nu})_t^{\,-i\omega_{23}(t-\tau)^{-(t-\tau)/2T}},$$

где параметр T характеризует ширину неоднородного уширения для верхнего уровня.

Тогда, пренебрегая суммированием по $\nu \neq \nu'$, мы можем выполнить интегрирование в правой части (5) и получить марковское кинетическое уравнение

$$\frac{d}{dt}\langle O(t)\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H_A(t), O(t)]\rangle + \frac{1}{2}\sum_{\nu}\Gamma_{\nu}\langle[R_{32}(\vec{\nu})_t, O(t)]R_{23}(\vec{\nu})_t\rangle + \frac{1}{2}\sum_{\nu}\Gamma^*_{\nu}\langle R_{32}(\vec{\nu})_t[O(t), R_{23}(\vec{\nu})_t]\rangle,(6)$$

где

$$\Gamma_{\nu} = \gamma_{\nu} - i\Omega_{\nu},$$

$$\gamma_\nu = 2(2\pi)^{-3}\rho^{-1}\int d\vec{k}\,\frac{2T|g_k|^2|\phi(\vec{k}-\vec{\nu})|^2}{1+4T^2(\omega_k-\omega_{32})^2},$$

$$\Omega_\nu = 2(2\pi)^{-3}\rho^{-1}\int d\vec{k}\,\frac{4T^2|g_k|^2|\phi(\vec{k}-\vec{\nu})|^2(\omega_k-\omega_{32})}{1+4T^2(\omega_k-\omega_{32})^2},$$

$$\rho = N/V,$$

$$H_A = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha R_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2}\hbar\omega_R(t)\sum_\nu\left\{\varphi(\vec{k}-\vec{\nu})R_{31}(\nu)e^{-i\omega_0 t} + \varphi^*(\vec{k}-\vec{\nu})R_{13}(\nu)e^{i\omega_0 t}\right\}.$$

Предположим, что направление волнового вектора $\vec{k}_0$ когерентного импульса накачки совпадает с направлением наибольшей вытянутости образца. Воспользуемся также одномодовым приближением [3]. В этом случае в уравнении (6) мы оставим только слагаемые с $\vec{\nu} = \vec{k}_0$. Тогда марковское одномодовое кинетическое уравнение (6) примет вид

$$\frac{d}{dt}\langle O(t)\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H_{At},O(t)]\rangle + \frac{1}{2}\Gamma\langle[R_{32_t},O(t)]R_{23_t}\rangle + \frac{1}{2}\Gamma^*\langle R_{32_t}[O(t),R_{23_t}]\rangle. \quad (7)$$

Удобно перейти в уравнении (7) к представлению медленно меняющихся амплитуд. Для этого воспользуемся унитарным преобразованием

$$U = \prod_f e^{i(\omega_0 t-\vec{k}_0\vec{x}_f)\sum_f R^{(f)}_{\alpha\alpha}}.$$

Преобразованный гамильтониан A-подсистемы есть

$$H_A = \frac{1}{2}\omega_R(t)(R_{31}+R_{13}).$$

Тогда из (7) мы можем получить систему марковских кинетических уравнений для медленно меняющихся амплитуд коллективных атомных операторов

$$\frac{d}{dt}\langle R_{11}\rangle = \frac{i}{2}\omega_R(t)\{\langle R_{31}\rangle - \langle R_{13}\rangle\},$$

$$\frac{d}{dt}\langle R_{22}\rangle = \gamma\langle R_{32}R_{23}\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle R_{33}\rangle = -\frac{i}{2}\omega_R(t)\{\langle R_{31}\rangle - \langle R_{13}\rangle\} - \gamma\langle R_{32}R_{23}\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle R_{13}\rangle = \frac{i}{2}\omega_R(t)\{\langle R_{33}\rangle - \langle R_{11}\rangle\} - \frac{\gamma}{2}\langle R_{12}R_{23}\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle R_{32}\rangle = \frac{i}{2}\omega_R(t)\langle R_{12}\rangle + \frac{\gamma}{2}\langle R_{32}(R_{33}-R_{22})\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle R_{12}\rangle = \frac{i}{2}\omega_R(t)\langle R_{32}\rangle + \frac{\gamma}{2}\langle R_{32}R_{13}\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle R_{32}R_{23}\rangle = -\frac{i}{2}\omega_R(t)\{\langle R_{32}R_{21}\rangle - \langle R_{12}R_{23}\rangle\} +$$
$$+\gamma\langle(R_{33}-R_{22}-2)R_{32}R_{23}\rangle, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\langle R_{32}R_{21}\rangle = -\frac{i}{2}\omega_R(t)\{\langle R_{32}R_{21}\rangle - \langle R_{12}R_{21}\rangle\} +$$
$$+\frac{\gamma}{2}\langle R_{31}R_{32}R_{23}\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle(R_{22}-1)R_{32}R_{21}\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle R_{12}R_{23}\rangle = \frac{i}{2}\omega_R(t)\{\langle R_{32}R_{23}\rangle - \langle R_{12}R_{21}\rangle\} +$$
$$+\frac{\gamma}{2}\langle R_{13}R_{32}R_{23}\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle(R_{22}-1)R_{12}R_{23}\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle R_{12}R_{21}\rangle = -\frac{i}{2}\omega_R(t)\{\langle R_{12}R_{23}\rangle - \langle R_{32}R_{21}\rangle\} +$$
$$+\frac{\gamma}{2}\langle R_{31}R_{12}R_{23}\rangle + \frac{\gamma}{2}\langle(R_{32}R_{21}R_{13}\rangle.$$

При записи уравнений (8) мы пренебрегли слагаемыми, содержащими малый множитель, описывающий коллективный сдвиг частоты.

В результате нами получена бесконечная цепочка зацепляющихся кинетических уравнений. Для замыкания цепочки уравнений будем использовать стандартные расцепления трехчастичных корреляторов

$$\langle (R_{33}-R_{22}-2)R_{32}R_{23}\rangle \approx \langle R_{33}-R_{22}-2\rangle\langle R_{32}R_{23}\rangle,$$
$$\langle R_{22}R_{32}R_{21}\rangle \approx \langle R_{22}\rangle\langle R_{32}R_{21}\rangle, (9)$$
$$\langle R_{31}R_{32}R_{23}\rangle \approx \langle R_{31}\rangle\langle R_{32}R_{23}\rangle$$

и пренебрежем корреляторами вида $\langle R_{31}R_{12}R_{23}\rangle$ и $\langle R_{32}R_{21}R_{13}\rangle$, описывающими двухфотонные процессы. В общем случае решение уравнений (8) даже с учетом сделанных приближений (9) возможно только численными методами.

Исследуем решения указанной системы. Для этого введем вещественные переменные

$$X = N^{-1}\langle R_{11}\rangle, \quad Y = N^{-1}\langle R_{22}\rangle,$$
$$W = N^{-2}\langle R_{32}R_{23}\rangle, \quad Z = iN^{-1}(\langle R_{31}\rangle - \langle R_{13}\rangle),$$
$$U = iN^{-2}(\langle R_{32}R_{21}\rangle - \langle R_{12}R_{23}\rangle),$$
$$V = N^{-1}\langle R_{12}R_{21}\rangle, \quad E(t) = \omega_R(t)\tau_R$$
$$\tau_R = 1/(\gamma N).$$

Тогда, принимая во внимание закон сохранения числа частиц

$$\langle R_{11}\rangle + \langle R_{22}\rangle + \langle R_{11}\rangle = N,$$

мы можем получить из (9) систему уравнений вида

$$\frac{d}{d\tau}X = \frac{1}{2}E(t)Z, \qquad \frac{d}{d\tau}Y = W,$$
$$\frac{d}{d\tau}Z = E(t)(1-2X-Y) - \frac{1}{2}U,$$
$$\frac{d}{d\tau}W = -\frac{1}{2}E(t)U + (1-X-2Y)W, (10)$$
$$\frac{d}{d\tau}U = E(t)(W-V) + \frac{1}{2}ZW - \frac{1}{2}YW,$$
$$\frac{d}{d\tau}V = \frac{1}{2}E(t)V.$$

При записи уравнений (10) мы учли, что $N >> 1$, и использовали приведенное время $\tau = t/\tau_R$, где τ_R – время наведения коллективных корреляций, или время сверхизлучения.

Уравнения (10) могут быть решены только численно. Выберем медленно меняющуюся огибающую для импульса накачки в виде гауссовой кривой. Тогда частоту Раби мы можем записать как

$$\omega_R(t) = \frac{\phi}{\sqrt{2\pi}\alpha\tau_p} exp\left\{-\frac{(t-t_0)^2}{2\alpha^2\tau_p^2}\right\}, (11)$$

где ϕ – площадь импульса накачки и $\alpha = 1/\sqrt{8\ln 2}$.

Решение уравнений (10) позволяет определить не только временное поведение атомных наблюдаемых, но и временную зависимость интенсивности сверхизлучения на переходе 3–2. Действительно, используя закон сохранения энергии, мы можем записать для интенсивности сверхизлучения выражение вида

$$I(t) = -N\hbar\omega_{23}\dot{X}.$$

Проведем сравнением развитой нами квантовой теории сверхизлучения с экспериментальными данными, полученными в работе З. Купрениса и В. Швядаса [10], которые исследовали сверхизлучение в парообразном Na при возбуждении атомов длительными импульсами накачки. В эксперименте использовались переходы в атомах Na (рис. 2).

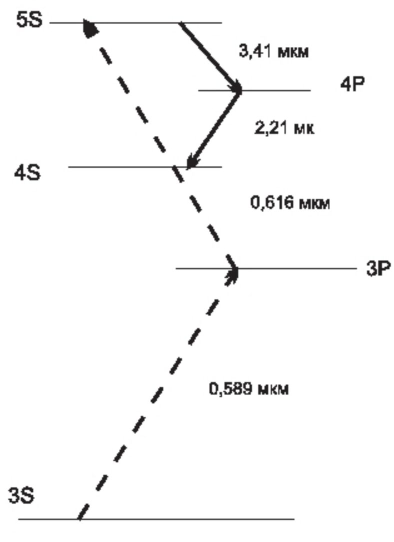

Рис. 2. Схема энергетических уровней и разрешенных переходов в эксперименте по наблюдению сверхизлучения в парах Na

Атомы Na возбуждались двумя ступенями на уровень 5S лазерными импульсами длительностью 15 нс. Сверхизлучение наблюдалось на переходах 4P – 4S (длина волны излучения 2,21 мкм), 4S – 3P (1,14 мкм), 3D – 3P (0,82 мкм), 3P – 3S (0,59 мкм). Для перехода 4P – 4S время наведения корреляций τ_R и время неоднородного уширения T_2^* (за счет эффекта Доплера) составляли около 1 нс. Это означает, что из-за эффекта Доплера для перехода 4P – 4S скооперироваться могут лишь атомы, которые возбуждаются в течении $T_2^* \cong 1$ нс, что много меньше длительности лазерного импульса накачки $\tau_p \cong 15$ нс.

Поскольку в уравнениях (10) в явном виде не учитываются эффекты дефазировки, мы учтем при расчетах интенсивности сверхизлучения указанную выше особенность эксперимента, выбирая в выражении (11) ширину импульса накачки равной 1 нс. Кроме того, учтем, что в экспериментах З. Купрениса и В. Швядаса мы имеем дело с протяженной системой излучателей, в то время как система уравнений (10) получена при использовании одномодового приближения. Как хорошо известно в теории сверхизлучения, для адекватного описания времени задержки импульса сверхизлучения протяженной системы типа «карандаша» можно использовать кинетические уравнения одномодового приближения с заменой реального число излучателей в образце N на эффективное число $N^* = \mu N$, где μ – геометрический фактор [1]. Для оценки эффективного числа излучателей воспользуемся соотношением $N^* = \tau_0/\tau_R$. Время спонтанного излучения для перехода 4P – 4S составляло около 200 нс. В результате получаем, что $N^* \cong 200$. На рисунке 3 показано временное поведение приведенных интенсивностей $J = I(t)/I_{max}$ импульсов накачки и сверхизлучения.

Из рисунка хорошо видно, что импульс сверхизлучения развивается на переднем фронте возбуждающего импульса. Параметры полученного сверхизлучательного импульса (время задержки и ширина импульса) хорошо согласуются с результатами эксперимента З. Купрениса и В. Швядаса. Нами не приведено точное количественное сравнение экспериментальных и теоретических значений параметров сверхизлучательного импульса, так как в рассматриваемых экспериментах не было выполнено одно из условий «чистого» сверхизлучения $t_D < T_2^*$ (время задержки сверхизлучательного импульса превосходило время неоднородного уширения атомов).

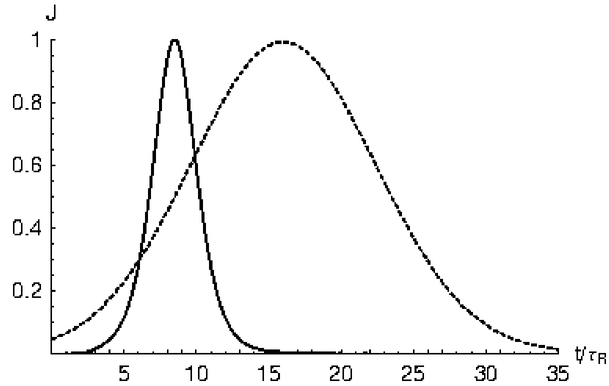

Рис. 3. Временное поведение приведенных интенсивностей импульсов сверхизлучения (сплошная линия) и накачки (штриховая линия) с учетом неоднородного уширения уровней

Таким образом, в настоящей работе нами построена последовательно квантовая теория сверхизлучения в протяженных трехуровневых системах Λ-типа при использовании лазерной накачки произвольной длительности. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Благодарности

Работа выполнена в рамках задания Министерства образования и науки РФ 2.2459.2011.

Литература

1. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир. 1978. 224 с.

2. Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А. Коллективное спонтанное излучение (сверхизлучение Дике) // УФН. 1980. Т. 131. Вып. 4. С. 653–694.

3. Gross M., Haroche S. Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission // Physics Reports. 1982. V. 93. № 5. P. 301–396.

4. Андреев А. В., Емельянов В. И.,

Ильинский Ю. А. Кооперативные явления в оптике. М.: Наука, 1988. 288 с.

5. Калачев А. А., Самарцев В. В. Когерентные явления в оптике. Казань: Изд-во Казанского госуниверситета. 2003. 281 с.

6. Yukalov V. I., Yukalova E. P. Coherent nuclear radiation // ЭЧАЯ. 2004. Т. 35. Вып. 3. С. 640–708.

7. Bowden C. M., Sung C. C. Cooperative behaviour among three-level systems: Transient effects of coherent pumping: I // Phys. Rev. 1978. Vol. 18. № 4. P. 1558–1570.

8. Mattar F. P., Bowden C. M. Coherent pump dynamics, propagations, transverse, and diffraction effects in three-level superfluorescence and control of light by light // Phys. Rev. 1983. Vol. 27. № 1. P. 345–359.

9. Lee C. T. Effects of pumping process on the tipping angle and quantum fluctuations in superfluorescence // Phys. Rev. Lett. 1979. Vol.43. № 15. P. 1110–1112.

10. Купренис З., Швядас В. Сверхизлучение атомов Na, возбуждаемых длительными импульсами // Известия АН СССР. Серия Физическая. 1989. Т. 53. Вып. 12. С. 2390–2392.

11. Башкиров Е. К. Квантовая теория сверхизлучения. I, II // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 4 (44). С. 85–114.

12. Башкиров Е. К., Гаранова Е. В. Квантовая теория сверхизлучения. I, II // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. № 6(56). С.333–353.

13. Башкиров Е. К., Шумовский А. С., Юкалов В. И. Динамика сверхизлучательной генерации в сегнетоэлектриках // ДАН СССР. Том. 282. № 2. С. 300–303.

14. Bogolubov N. N., Bashkirov E. K., Fam le Kien, Shumovsky A. S. Superradiance allowing for the pumping processes // Physica. 1985. Vol. 133. P. 413–424.

15. Боголюбов Н. Н.(мл.), Башкиров Е. К., Фам Ле Киен, Шумовский А. С. Динамика сверхизлучательных процессов в двухуровневых макроскопических системах в кристалле // Теоретическая и математическая физика. 1987. Том. 70. № 3. С. 454–461.

16. Башкиров Е. К. Расцепление многочастичных корреляторов в квантовой теории сверхизлучения // Известия РАН. Серия Физическая. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 327–332.

17. Башкиров Е. К. Сверхизлучение в трехуровневых системах с учетом когерентной накачки // Известия РАН. Серия Физическая. 2000. Т.64. Вып. 10. С. 1920–1923.

18. Башкиров Е. К. Коллективное спонтанное излучение макроскопических трехуровневых систем V-типа // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2005. Т. 8. № 2. С. 17–21.

19. Bashkirov E. K. Dynamics of phonon mode in superradiance regime of laser cooling of crystals // Phys. Lett. 2005. Vol. 341. P. 345–351.

20. Bashkirov E. K., Petrushkin S. V. On the quantum theory of superradiance in two-level and three-level macroscopic systems // Laser Physics. 2006. V. 16. № 8. P. 1202–1212.

Статья поступила в редакцию 30.10.2012 г.