

## ВЫБОР ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ИНСПЕКЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ ПО ОРБИТАМ МАЛОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ

М. С. Щербаков, Е. А. Ускова

В данной работе рассматривается облёт по инспекционной траектории, совершаемый одним космическим аппаратом (КА) относительно другого. Получены выражения для начальных условий движения в случае центрального поля притяжения Земли при движении базового КА по круговым и эллиптическим орбитам, позволяющих реализовать замкнутую траекторию в орбитальной системе координат при полностью пассивном движении обоих КА. Исследовано различие между начальными условиями движения и их линейными аналогами, с учётом различных возмущающих факторов. Проведено исследование деформации номинального инспекционного эллипса в центральном поле для различных орбит базового КА. Полученные результаты могут применяться для реализации группового полёта близко летящих КА для миссий по построению сложных космических систем на орбите.

**Ключевые слова:** близко летящие космические аппараты, относительное движение, номинальный инспекционный эллипс, выбор начальных условий движения.

В настоящее время активно используется групповой полёт космических аппаратов (КА). Интерес к этой технологии обусловлен тем, что она позволяет расширить круг научно-исследовательских и прикладных задач. Группировка КА способна нести научные приборы, эффективность которых возрастает при их одновременном использовании в разных точках пространства. Близко-летающие КА могут решать задачу инспекции, которая важна при построении сложных модульных объектов на орбите и детектировании космического мусора. При использовании группы КА, возрастает общая надёжность миссии, так как выход из строя одного КА не приводит к её нештатному завершению. Одной из основных трудностей, возникающей при групповом полёте является поддержание заданной формации, в которой расстояние между КА может составлять от нескольких сотен метров до десятков километров. Из-за необходимости поддержания таких небольших расстояний возрастают требования к системе управления. Для решения этой задачи разрабатываются специальные подходы сохранения

формации КА. Одним из таких подходов является подбор начальных орбитальных параметров движения, при котором геометрическая форма группировки КА сохраняется в допустимых пределах на конечном интервале времени при пассивном движении. Такой подход особенно актуален для задач, в которых один КА совершает облёт другого по инспекционному эллипсу. Возможность реализации замкнутых относительных траекторий показана в [1]. В работе [2] используются модель относительного движения, при условиях, что поле притяжения Земли центральное, а расстояние между КА мало, относительно орбитального радиус-вектора, инспектируемого КА. При такой постановке относительное движение будет описываться уравнениями Хилла и иметь аналитическое решение, позволяющие реализовать замкнутый инспекционный эллипс. Основными возмущающими факторами, влияющие на изменение геометрической формы группы КА являются эллиптичность орбит и вторая зональная гармоника, которые не позволяют использовать решения уравнений Хилла [3].

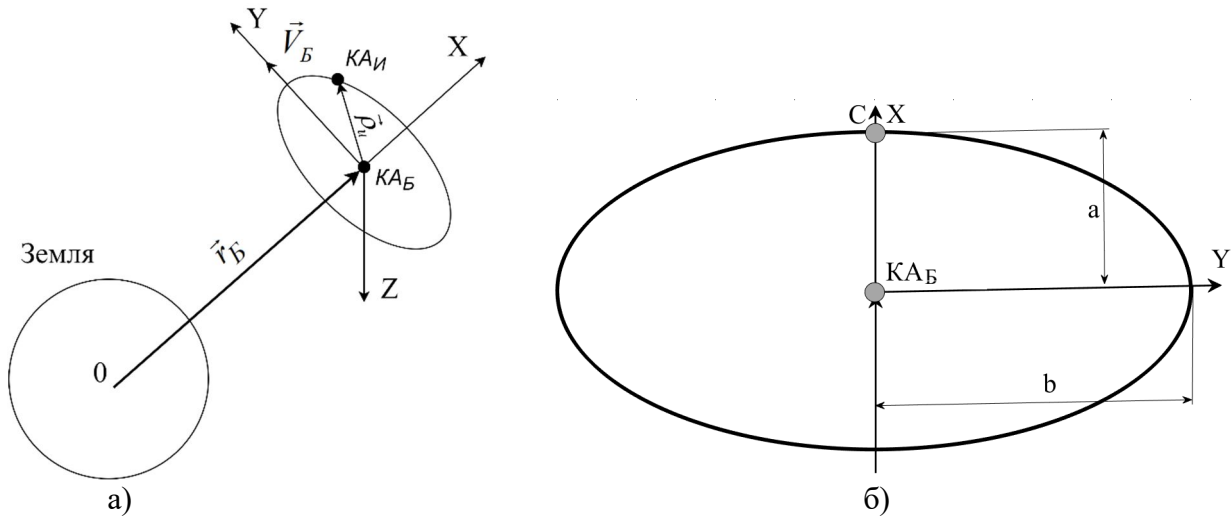
---

© Щербаков М. С., Ускова Е. А., 2020.

Щербаков Михаил Сергеевич (*sherbakov.m.s@mail.ru*), аспирант;

Ускова Екатерина Александровна (*uskova.katya2015@yandex.ru*),

магистрант Межвузовской кафедры космических исследований Самарского университета, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.



**Рис. 1. Орбитальная система координат и номинальный инспекционный эллипс**

В [4] рассматривается подбор начальных условий движения в нормальное поле притяжения. Полученный результат позволяет сформулировать рекомендации по выбору начальных условий и реализовать пассивное инспекционное движение продолжительностью более 40 суток без учета эллиптичности орбиты инспектируемого (базового) КА (КА<sub>Б</sub>). В данной работе рассматривается формация из двух КА, КА-инспектор (КА<sub>И</sub>) совершает облет КА<sub>Б</sub> по инспекционному эллипсу. Особенностью работы является вывод начальных условий движения, при которых относительная траектория будет замкнутой, при движении в центральном поле притяжения, с учетом малой эллиптичности орбиты КА<sub>Б</sub>.

**Постановка задачи**

В работе рассматривается относительное движение двух КА, в одной орбитальной плоскости. КА<sub>И</sub> движется по инспекционному эллипсу, в центре которого находится базовый КА<sub>Б</sub>. Движение рассматривается в Орбитальной системе координат (ОСК) ось ОХ направлена по радиусу-вектору  $\vec{r}_B$ , ось ОУ лежит в плоскости орбиты КА<sub>Б</sub> и направлена в сторону его движения, а ось ОZ дополняет систему координат до правой (рис. 1а).

Движение КА<sub>И</sub> в ОСК в центральном поле и с учетом эллиптичности орбиты КА<sub>Б</sub> описывается системой уравнений [5]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{\theta}_B y + \dot{\theta}_B^2 x + 2\dot{\theta}_B \dot{y} + \frac{\mu}{r_B^2} - \frac{\mu}{[(r_B+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}(r_B+x) \\ \ddot{y} &= -\ddot{\theta}_B x + \dot{\theta}_B^2 y - 2\dot{\theta}_B \dot{x} - \frac{\mu}{[(r_B+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}y \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{[(r_B+x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}z \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_B &= r_B \dot{\theta}_B^2 - \frac{\mu}{r_B^2} \\ \ddot{\theta}_B &= -\frac{2\dot{r}_B \dot{\theta}_B}{r_B} \end{aligned}$$

где

$$\dot{\theta}_B = \sqrt{\frac{\mu}{a_B^3} \frac{(1 + e_B \cos \theta_B)^2}{(1 - e_B^2)^{\frac{3}{2}}}} \text{ — угловая скорость}$$

движения по орбите КА<sub>Б</sub>;

$$\dot{r}_B = e_B \sin \theta_B \sqrt{\frac{\mu}{a_B(1 - e_B^2)}} \text{ — скорость изменения радиус-вектора КА}_B;$$

$\mu$  — гравитационный параметр Земли.

Если рассмотреть движение КА<sub>Б</sub> по круговой орбите и принять допущение о том, что расстояние между КА мало по сравнению с радиус-вектором, то система (1) преобразуется в систему уравнений Хилла и будет иметь аналитическое решение [6], из которого можно получить условия для реализации замкнутого инспекционного эллипса, период движения по которому будет равен орбитальному, а большая полуось будет вдвое больше малой (рис. 1 б). В центре инспекционного эллипса располагается КА<sub>Б</sub>, а вектор начальных

условий движения КА<sub>И</sub> должен иметь вид [6]:

$$\vec{p}_{uo} = \left( x_o, y_o, 0, \dot{x}_o = \frac{y_o \dot{\theta}_o}{2}, \dot{y}_o = -2x_o \dot{\theta}_o, 0 \right)^T \quad (2)$$

В данной работе эллипс, получаемый с использованием (2) называется номинальный инспекционный эллипс (НИЭ). А сами начальные условия называются – начальные условия Хилла.

### Квазипериодическое инспекционное движение

Под квазипериодическим инспекционным движением (КИД) понимается такое, при котором КА<sub>И</sub> движется по замкнутой относительной траектории вокруг КА<sub>Б</sub> в центральном поле притяжения и с учётом эллиптичности орбиты КА<sub>Б</sub>. В основе создания КИД между двумя КА, лежит идея соизмеримости орбитальных энергий, это позволяет сформулировать начальные условия для нелинейной системы уравнений относительного движения (5). Предположим, что орбитальные энергии движения обоих КА равны:

$$\Delta E = E_B - E_{II} = 0 \quad (3)$$

Выведем начальные условия для КИД при круговой орбите КА<sub>Б</sub>, рассматривая плоское движение. Полная энергия КА<sub>И</sub> и КА<sub>Б</sub> [7]:

$$E_B = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_B r_B)^2 - \frac{\mu}{r_B} \quad (4)$$

$$E_{II} = \frac{1}{2} (\dot{x} - \dot{\theta}_B y)^2 + \frac{1}{2} [\dot{y} + \dot{\theta}_B (r_B + x)]^2 - \frac{\mu}{\sqrt{(r_B + x)^2 + y^2}} \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3) получим обобщённое условие КИД:

$$\frac{1}{2} (\dot{x} - \dot{\theta}_B y)^2 + \frac{1}{2} (\dot{y} + \dot{\theta}_B x)^2 + \dot{\theta}_B r_B (\dot{y} + \dot{\theta}_B x) + \left[ \frac{\mu}{r_B} - \frac{\mu}{\sqrt{(r_B + x)^2 + y^2}} \right] = 0 \quad (6)$$

Допустим, что КА<sub>И</sub> начинает движение из точки С (рис. 1 б), тогда (2) преобразуется:

$$\vec{p}_{uo}(C) = (x_o \neq 0, y_o = 0, \dot{x}_o = 0, \dot{y}_o = -2x_o \dot{\theta}_B)^T \quad (7)$$

Чтобы получить начальные условия движения, соответствующие замкнутой относительной траектории, подставим (7) в (6). Решая квадратное уравнение, найдём

корни  $\dot{y}_0$ :

$$\dot{y}_0 = -\dot{\theta}_B (r_B + x_o) \pm \sqrt{\dot{\theta}_B^2 (r_B + x_o)^2 - \left[ (\dot{x}_o - \dot{\theta}_B y_o)^2 + \dot{\theta}_B^2 x_o (2r_B + x_o) + 2 \left( \frac{\mu}{r_B} - \frac{\mu}{\sqrt{(r_B + x_o)^2 + y_o^2}} \right) \right]} \quad (8)$$

Выражение (8) назовём обобщённым начальным условием для круговых орбит. Оно позволяет реализовать КИД с помощью подбора начальных условий движения для точки С (рис.1 б). Исследуя подкоренное выражение (8), можно наложить ограничения на область значений начальных условий движения:

$$x_o \leq \frac{\dot{\theta}_B^2 r_B^4}{2\mu - \dot{\theta}_B^2 r_B^3} \quad (9)$$

В рассматриваемой постановке задачи это условие выполняется для всех орбит и для всех размеров инспекционных эллипсов.

Выведем начальные условия для КИД при малой эллиптичности орбиты КА<sub>Б</sub>, рассматривая плоское движение. Полная энергия КА<sub>И</sub> и КА<sub>О</sub> будет:

$$E_B = \frac{1}{2} \left( \dot{\theta}_B r_B \frac{e_B \sin \theta_B}{1 + e_B \cos \theta_B} \right)^2 + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_B r_B)^2 - \frac{\mu}{r_B} \quad (10)$$

$$E_{II} = \frac{1}{2} \left( \dot{x} - \dot{\theta}_B y + \dot{\theta}_B r_B \frac{e_B \sin \theta_B}{1 + e_B \cos \theta_B} \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} [\dot{y} + \dot{\theta}_B (r_B + x)]^2 - \frac{\mu}{\sqrt{(r_B + x)^2 + y^2}} \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (3), получим обобщённое условие КИД:

$$\frac{1}{2} (\dot{x} - \dot{\theta}_B y)^2 + \frac{1}{2} (\dot{y} + \dot{\theta}_B x)^2 + \dot{\theta}_B r_B (\dot{y} + \dot{\theta}_B x) +$$

$$+ \dot{\theta}_B r_B \frac{e_B \sin \theta_B}{1 + e_B \cos \theta_B} (\dot{x} - \dot{\theta}_B y) +$$

$$\left[ \frac{\mu}{r_B} - \frac{\mu}{\sqrt{(r_B + x)^2 + y^2}} \right] = 0 \quad (12)$$

Подставляя (6) в (12), получим квадратное уравнение. Найдём корни для  $\dot{y}_0$ :

$$\dot{y}_0 = -\dot{\theta}_B (r_B + x_o) \pm \sqrt{\dot{\theta}_B^2 (r_B + x_o)^2 - (\dot{x}_o - \dot{\theta}_B y_o) \left[ (\dot{x}_o - \dot{\theta}_B y_o) + 2\dot{\theta}_B r_B \frac{e_B \sin \theta_B}{1 + e_B \cos \theta_B} \right] -$$

$$-\sqrt{2 \left[ \frac{\mu}{r_B} - \frac{\mu}{\sqrt{(r_B + x_0)^2 + y_0^2}} \right]} - \dot{\theta}_B^2 x_0 (2r_B + x_0) \quad (13)$$

Выражение (13) назовём обобщённым начальным условием для орбит малой эллиптичности. Ограничения, налагаемые на начальные условия движения наличием квадратного корня, совпадают с (9).

Линеаризуя (12), можно получить обобщенное условие квазипериодического относительного движения для линейного поля притяжения на орбитах малой эллиптичности по аналогии с начальными условиями Хилла когда угол истинной аномалии базового спутника  $\theta_B = 0$  и КА<sub>и</sub> начинает движение из точки С (рис. 1б) [7]:

$$\dot{y}_0 = - \frac{n_B (e_B + 2)}{(1 + e_B)^2 (1 - e_B)^2} x_0 \quad (14)$$

где  $n_B$  – среднее угловое движение,

$$n_B = \sqrt{\frac{\mu}{a_B^3}}$$

Начальные условия (14) в данной работе будем называть аналогом начальных условий Хилла для эллиптических орбит.

### Параметрический анализ начальных условий при движении по инспекционной траектории

Проведем сравнение выражений для выбора начальных условий, полученных при линеаризации уравнений относительного движения, с обобщёнными начальными условиями для центрального поля притяжения, круговых и эллиптических орбит КА<sub>Б</sub>. Будут исследованы две орбиты КА<sub>О</sub> – 500, 1000 км

и инспекционные эллипсы с малой полуосью от 250 метров до 10 км.

Рассмотрим круговую орбиту КА<sub>Б</sub>. Оценим разницу между условиями Хилла (6) и обобщённым начальным условием для круговых орбит (8). КА<sub>и</sub> начинает движение из точки С (рис. 1б). Результаты моделирования показаны на рисунке 2.

В расчётах, приведённых на рисунке 2, использовался только один корень (8), второе слагаемое которого имеет знак «+». Другой корень выражения (8) не может быть использован, так как при его применении значение относительной скорости КА<sub>и</sub> не соответствует физической постановке рассматриваемой задачи. Можно сделать вывод, что разница между линейным выражением (7) и (8) возрастает при увеличении размеров инспекционного эллипса. Это обусловлено тем, что возрастает величина разностного гравитационного ускорения, действующего на оба КА, это приводит увеличению разности между (7) и (8). Изменение высоты орбиты также вносит вклад в отличие начальных скоростей, но он существенно меньше, так как на деформацию инспекционного эллипса сильнее влияет разностное гравитационное ускорение, нежели изменение его абсолютной величины, действующего на отдельный КА.

Рассмотрим движение КА<sub>Б</sub> по эллиптической орбите. Эксцентриситет будет принимать значения 0,01 и 0,05. Оценим разницу между аналогом условия Хилла (14) и обобщённым начальным условием (13), при условии, что КА<sub>и</sub> начинает движение из точки С (рис. 1б). Расчёт начальных условий проводится в момент времени, когда КА<sub>Б</sub> проходит через перигей. Высота орбиты КА<sub>Б</sub> в перигеи 500 км. Результаты моделирования показаны на рисунке 3.

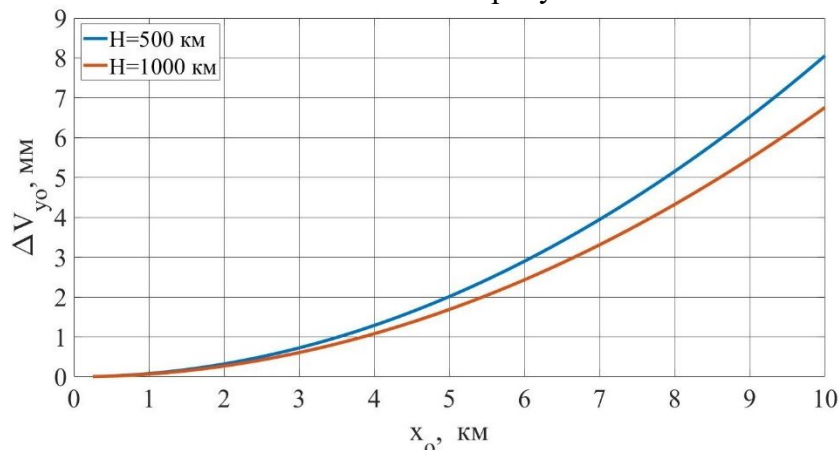


Рис. 2. Разница начальных скоростей при круговой орбите КА<sub>Б</sub>

Для расчетов, приведенных на рисунке 3, по аналогии с предыдущим расчётом использовался один корень выражения (13). Анализируя рисунок 3, можно сделать вывод, что при наличии небольшой эллиптичности орбиты КА<sub>Б</sub> существенно возрастает погрешность линеаризации.

### Исследование квазипериодического инспекционного движения

Обобщённые начальные условия (8 и 13) позволяют реализовать КИД при движении в центральном поле и при малой эллиптичности орбиты КА<sub>Б</sub>. Проведём исследование, позволяющие определить отличие траектории КИД, по которой движется КА<sub>И</sub> от номинального инспекционного эллипса. Так как исследуемые траектории НИЭ и КИД в ОСК

представляют из себя эллипсы, проведем сравнение их больших и малых полуосей:

$$\Delta a = a_n - a_k$$

$$\Delta b = b_n - b_k$$

где индексы «н» и «к» обозначают соответственно принадлежность к НИЭ и КИД. Для расчётов использовались следующие начальные условия: высота орбиты КА<sub>Б</sub> 500 км в перигеуме, эксцентриситет принимает два значения 0,01 и 0,05, КА<sub>И</sub> начинает движение из точки С (рис. 1б), малая полуось (равна начальному значению  $x_0$ ) варьируется в диапазоне от 250 м до 10 км.

Результаты моделирования показаны на рисунке 4. Исследование показало, что малые полуоси НИЭ и КИД совпадают, а большие различаются на 0,06 %.

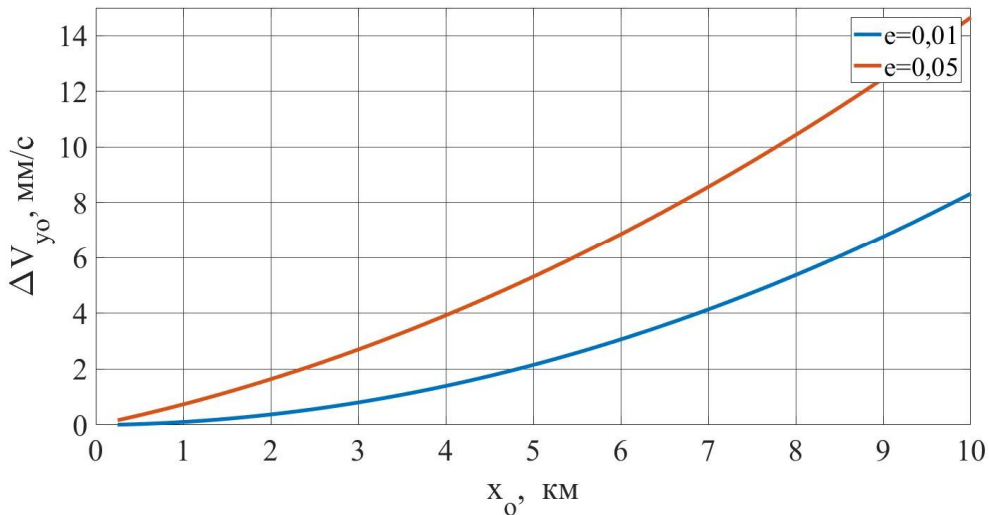


Рис. 3. Разница начальных скоростей при эллиптической орбите КА<sub>Б</sub>

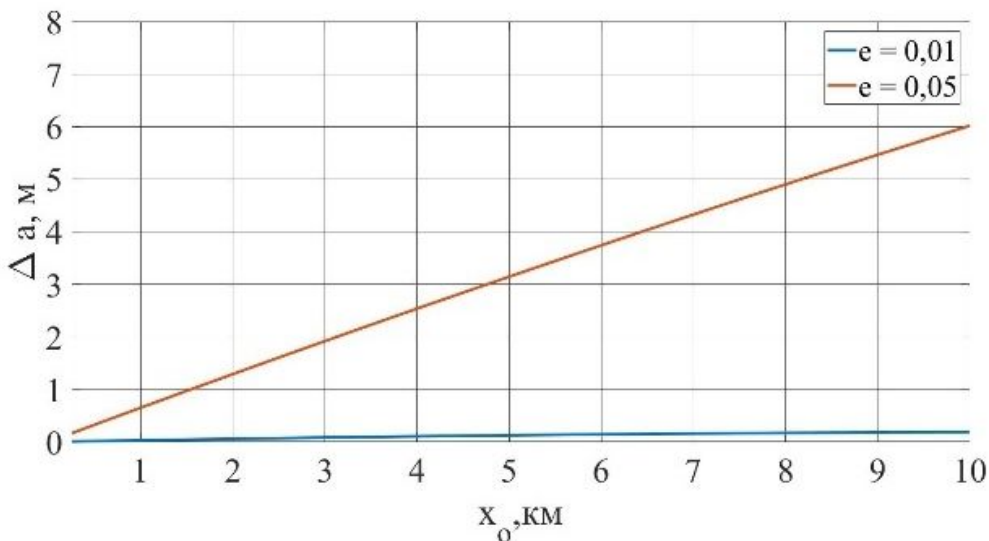


Рис. 4. Отличие больших полуосей в ОСК

### Заключение

В работе получены обобщённые начальные условия, позволяющие скорректировать начальные условия Хилла и реализовать КИД в центральном поле притяжения для круговой и эллиптической орбиты КА<sub>Б</sub>. Основной вклад в различие между выражениями для КИД и их линейризованными аналогами вносит увеличение размеров НИЭ, это приводит к увеличению разностного гравитационного ускорения, действующего на оба КА. На втором месте по величине вклада – эллиптичность орбиты КА<sub>Б</sub>, в следствие чего будет происходить увеличение различия между орбитальными периодами. На третьем – высота орбиты КА<sub>Б</sub>, вклад этого параметра самый незначительный, это обусловлено тем, что изменяются орбиты обоих КА и величина разностного гравитационного ускорения будет изменяться в меньшей степени. При малой полуоси НИЭ равной 250 м, 500 м, 1 км разница между (7) и (8) пренебрежимо мала и можно использовать линейризованные выражения для выбора начальных условий. Проведено сравнение НИЭ и КИД, которое показало, что для случая орбит малой эллиптичности большие полуоси эллипсов отличаются незначительно, а малые полуоси совпадают, если КА<sub>И</sub> начинает свое движение из точки С (рис. 16). Результаты работы могут быть использованы для реализации группового полета, выведенные начальные условия позволят обеспечивать максимальную стабильность относительного движения в центральном поле притяжения при полете по круговым и эллиптическим орбитам.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках проекта FSSS-2020-0018, финансируемого из средств

государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России.

### Литература

1. Hanspeter Schaub and Kyle T. Alfriend J2 invariant relative orbits for spacecraft formations// *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2001. Vol. 79, P. 77–95.
2. Sabol C., Burns R. and McLaughlin C. A. Satellite Formation Flying Design and Evolution// *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 38, No. 2, 2004. P. 270–278.
3. In-Plane Satellite Formations in Eccentric Orbits under J2 Perturbation/ Guangyan Xu, Danwei Wang, Eng Kee Poh [et al.] // *IEEEAC paper #1153, Version 4, Nov. 30, 2008*.
4. Shcherbakov M.S., Avariaskin D.P. Studying problems on choosing stable orbits of nanosatellites to provide passive and periodic relative trajectories// *J. Phys.: Conf. Ser.* 1536 012001, 2020.
5. Sessa S. Vaddi, Srinivas R. Vadali and Kyle T. Alfriend Formation Flying: Accommodating Nonlinearity and Eccentricity Perturbations// *Journal of Guidance Control, and Dynamics*. 2003. Vol. 26, № 2.
6. Sabatini M., Izzo D., Bevilacqua R. Special Inclinations Allowing Minimal Drift Orbits for Formation Flying Satellites// *Journal of Guidance Control and Dynamics* 31(1), January 2008, P. 94–100.
7. Satellite Formation Design and Optimal Station keeping Considering Nonlinearity and Eccentricity/ Jian-jun Xing, Guo-jin Tang, Xiao-ning Xi [et al.]// *Journal of Guidance Control, and Dynamics*. 2007. Vol. 30. № 5.

# CHOOSING THE MOTION INITIAL CONDITIONS AND SUSTAINABILITY RESEARCH INSPECTION MOTION IN SMALL ELLIPTIC ORBITS

M. S. Shcherbakov, E. A. Uskova

In this paper, we consider the movement along an inspection trajectory when one spacecraft flies around another spacecraft. Expressions are obtained for the initial conditions of motion in the case of the central field of gravity of the Earth during the motion of the base spacecraft in circular and elliptical orbits. Using the obtained initial conditions, one can realize a closed trajectory in the orbital coordinate system with the passive motion of both spacecraft. The difference between the initial conditions of motion and their linear counterparts is studied, taking into account various disturbing factors. The study of the deformation of the nominal inspection ellipse in the central field for various orbits of the base spacecraft was carried out. The results can be used to realize a group flight of closely flying spacecraft for missions to build complex space systems in orbit.

**Key words:** close-flying spacecraft, relative motion, nominal inspection ellipse, selection of initial driving conditions.

*Статья поступила в редакцию 08.07.2020 г.*