МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Гилёв

В данной работе рассмотрена начально-краевая задача для нагруженного интегро-дифференциального уравнения, доказаны существование и единственность обобщенного решения поставленной задачи, а также найдены условия на входные данные, при выполнении которых существует единственное обобщенное решение поставленной задачи. Основным математическим инструментом доказательства единственности обобщенного решения данной задачи служат априорные оценки. Для доказательства существования обобщенного решения поставленной задачи была построена последовательность приближенных решений, доказана её ограниченность, что позволило выделить из этой последовательности слабо сходящуюся подпоследовательность, и показано, что слабый предел выделенной подпоследовательности и есть обобщенное решение задачи.

Ключевые слова: неклассическая задача, обобщённое решение, разрешимость, пространство Соболева, слабая сходимость.

Дифференциальные уравнения в частных производных впервые были исследованы в XVIII веке в работах Эйлера. Благодаря развитию теории уравнений в частных производных стало возможным математическое моделирование широкого круга физических явлений, в частности, колебания струны и мембраны. Однако с течением времени возникали все более сложные задачи, что привело к потребности обобщения классических задач, постановке качественно новых задач и разработке методов их исследования. Возникшие потребности привели к изучению нового класса задач, который получил название неклассические задачи математической физики, один из разделов которого посвящен нагруженным дифференциальным уравнениям.

Пусть A – дифференциальный оператор. Заданное в n-мерной области Ω евклидова пространства точек $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ уравнение

$$Au(x)=f(x)$$

называется нагруженным, если оно содержит след некоторых операций от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих замыканию $\overline{\Omega}$ многообразиях размерности меньших n [1, с. 88].

Так, например, нагруженным является уравнение Буссинеска, описывающее, при определенных условиях, неустановившееся движение грунтовых вод

$$k\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=\frac{2\sigma}{l}\int_0^l u_t(\xi,t)\,d\xi,$$

уравнение Пригожина, моделирующее движение автомобилей по автостраде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+y\frac{\partial\varphi}{\partial x}=$$
$$=(1-p)\varphi\int_\alpha^\beta(y-\eta)\varphi(x,t,\eta)\,d\eta-\frac{1}{r_0}(\varphi-G(y))\int_\alpha^\beta\varphi(x,t,\eta)\,d\eta,$$

стационарное односкоростное уравнение переноса

$$\frac{1}{\alpha(x)}\sum_{i=1}^{3}y_i\frac{\partial u(x,y)}{\partial x_i}+u(x,y)=$$
$$=\frac{\lambda}{4\pi}\int_{|\xi|=1}\theta(x,y,\xi)u(x,\xi)\,d\xi+f(x,y).$$

Гилёв Антон Владимирович (toshqaaa@gmail.com), студент V курса математического факультета Самарского университета, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Ещё одним примером нагруженного уравнения служит уравнение, описывающее колебания мембраны барабана

$$u_{tt}=a^2(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r)-\alpha^2\int_0^{r_0}ru(r,t)dr.$$

Нагруженные уравнения применяются при исследовании задач математической физики, математической биологии, теории моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью. В своей статье [2] А. М. Нахушев впервые дал определение нагруженным дифференциальным уравнениям, а в последствии и классифицировал их. В ходе дальнейших исследований было установлено, что эти уравнения могут выступать как метод введения обобщенных решений различных классов дифференциальных уравнений в частных производных.

Стоит заметить, что задачи, связанные с нагруженными уравнениями, не являются классическими, так как наличие нагруженного слагаемого не всегда позволяет использовать известные ранее методы исследования, что приводит как к новым трудностям при решении
задач, так и к потребности в разработке новых методов решения. В этом и заключается актуальность исследований такого класса уравнений.

Начиная с последней четверти XX века и по нынешнее время, множество статей и книг было посвящено нагруженным уравнениям: здесь следует отметить труды А. М. Нахушева [1–3], М. Т. Дженалиева и М. И. Рамазанова [4], а также монографию Дженалиева [5].

В ходе исследований было выявлено одно очень важно приложение нагруженных уравнений. Нагруженные уравнения используются как метод решения нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Заметим, что нелокальные задачи образуют еще один важный класс качественно новых задач, актуальность исследования которых обусловлена потребностями современного естествознания.

Нелокальные условия – это соотношения, которые связывают значения искомого решения и его производных в различных граничных и внутренних точках области, в которой ищется решение задачи. Задачи с нелокальными условиями для дифференциальных уравнений возникают тогда, когда граница протекания процесса недоступна для измерений [6].

Говоря о нелокальных задачах, отметим работы В. А. Стеклова [7], А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [8], А. И. Кожанова и Л. С. Пулькиной [9], А. М. Нахушева [10]. В этих работах отмечено, что наличие нелокальных условий не позволяет применять для исследования разрешимости задач классические методы, разработанные для начально-краевых задач.

Указанная связь нагруженных уравнений и нелокальных условий удобна тем, что позволяет редуцировать задачу о нахождении решения некоторого уравнения, удовлетворяющего нелокальному условию, к задаче о нахождении решения некоторого нагруженного уравнения, удовлетворяющего классическим граничным условиям.

Постановка задачи

В прямоугольнике $Q_T=(0,l)\times(0,T)$ рассмотрим нагруженное уравнение

$$u_{tt}-(a(x,t)u_x)_x+c(x,t)u+\int_0^l K(x)udx=f(x,t) \tag{1.1}$$

и поставим следующую задачу: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x). \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0; \tag{1.3}$$

Введём понятие обобщенного решения поставленной задачи. Следуя [11], умножим (1.1) на произвольную гладкую функцию v, предполагая, что $u(x,t)$ решение задачи (1.1) – (1.3), и проинтегрируем по области $Q_T=(0,l)\times(0,T)$. Получим

$$\int_0^T\int_0^l(u_{tt}-(au_x)_x+cu+\int_0^l K(x)udx)vdxdt=\int_0^T\int_0^l fvdxdt. \tag{1.4}$$

Проинтегрируем по частям первые два элемента полученного выражения

$$\int_0^T\int_0^l u_{tt}vdxdt=-\int_0^T\int_0^l u_tv_tdxdt+\int_0^l u_tv\Big|_0^T dx;$$

$$-\int_0^T\int_0^l (au_x)_x vdxdt=\int_0^T\int_0^l au_xv_xdxdt-\int_0^T au_xv\Big|_0^l dt.$$

Теперь потребуем, чтобы $v(x,T)=0,\ v(0,t)=v(l,t)=0.$ В силу этих требований имеем

$$-\int_0^T\int_0^l u_tv_tdxdt+\int_0^l u_tv\Big|_0^T dx=-\int_0^T\int_0^l u_tv_tdxdt+$$

$$+\int_0^l(-u_t(x,0)v(x,0))dx=-\int_0^T\int_0^l u_tv_tdxdt-\int_0^l\psi(x)v(x,0)dx;$$

$$\int_0^T\int_0^l au_xv_xdxdt-\int_0^T au_xv\Big|_0^l dt=\int_0^T\int_0^l au_xv_xdxdt.$$

Тогда из (1.4) получим

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+\int_0^T\int_0^l v(\int_0^l K(x)udx)dxdt=$$

$$=\int_0^l\psi(x)v(x,0)dx+\int_0^T\int_0^l fvdxdt. \tag{1.5}$$

Обозначим

$W_{2,0}^1(Q_T)=\{u(x,t): u\in W_2^1(Q_T),\ u(0,t)=u(l,t)=0\}$

$$\widehat{W}_{2,0}^1(Q_T)=\{v: v\in W_{2,0}^1(Q_T),\ v(x,T)=0\}.$$

Определение. Функцию $u(x,t)\in W_{2,0}^1(Q_T)$ будем называть обобщенным решением задачи $(1.1)-(1.3)$, если $u(x,0)=\varphi(x)$ и $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^l v(\int_0^l K(x)udx)dxdt=\int_0^l\psi(x)v(x,0)dx+\int_0^T\int_0^l fvdxdt.$$

для любой функции $v\in\widehat{W}_{2,0}^1(Q_T)$.

Разрешимость поставленной задачи

Теорема. Пусть выполняются условия

$$a(x,t),\ a_t(x,t)\in C(\bar{Q}_T),\ c(x,t)\in C^1(\bar{Q}_T),$$
$$K(x)\in C^1[0,l],\ f(x,t)\in L_2(Q_T).$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи $(1.1)-(1.3)$.

Доказательство.

Сначала покажем, что существует не больше одного решения задачи. Для этого предположим противное: существует два решения этой задачи: u^1 и u^2, где u^1 и u^2 обобщенные решения соответствующих уравнений. Тогда, в силу линейности задачи, $u=u^1-u^2$ тоже является решением. Если эта разность будет равна нулю, то решение единственно $(u^1=u^2)$. Для $u=u^1-u^2$ справедливо тождество

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_0^l v(\int_0^l K(x)udx)dxdt=0,\ \forall v\in\widehat{W}_{2,0}^1(Q_T). \tag{1.6}$$

Выберем функцию v следующим образом

$$v=\begin{cases}\int_0^l u(x,\eta)d\eta,\ 0\le t\le\tau\\ 0,\ \tau\le t\le T\end{cases} \tag{1.7}$$

Отметим, что v удовлетворяет условиям задачи. Так как $v_x=\int_\tau^t u_xd\eta\in L_2$, то $v\in\widehat{W}_{2,0}^1(Q_T)$. Таким образом, (1.6) выполняется. Теперь подставим (1.7) в (1.6) и воспользуемся интегрированием по частям. Получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l(u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0))dx+\int_0^\tau\int_0^l cv_tvdxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^l v(\int_0^l K(x)v_tdx)dxdt=0.$$

Из последнего равенства следует неравенство

$$\frac{1}{2}\int_0^l(u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0))dx\le\Big|\int_0^\tau\int_0^l cv_tvdxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt+\int_0^\tau\int_0^l v(\int_0^l K(x)v_tdx)dxdt\Big|. \tag{1.8}$$

Воспользуемся неравенством Коши и неравенством Коши-Буняковского для оценки некоторых интегралов в (1.8). Тогда, приняв во внимание, что

$$v^2(x,t)=(\int_\tau^t u(x,\eta)d\eta)^2\le\tau\int_\tau^t u^2(x,\eta)d\eta,$$

(1.8) перепишем в виде

$$\frac{1}{2}\int_0^l (u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0))dx \le \int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2 dxdt +$$

$$+(1+c_0)\int_0^\tau\int_0^l \tau\int_\tau^t u^2(x,\eta)d\eta dxdt + (lK_0+c_0)\int_0^\tau\int_0^l v_t^2 dxdt,$$

где $c_0 \ge \max_{Q_T} |c(x,t)|$.

Введём вспомогательную функцию $w(x,t)=\int_0^t u_x d\eta$. Тогда, в силу выбора функции v, последнее неравенство будет иметь вид

$$\int_0^l (u^2(x,\tau)+a(x,0)w^2(x,\tau))dx \le 2a_1\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,t)dxdt +$$

$$+2a_1\int_0^l w^2(x,\tau)dx + (1+c_0)\int_0^\tau\int_0^l \tau\left|\int_\tau^t u^2(x,\eta)d\eta\right| dxdt +$$

$$+(lK_0+c_0)\int_0^\tau\int_0^l u^2 dxdt, \qquad (1.9)$$

где $a_1 \ge \max_{Q_T} |a_t(x,t)|$.

Воспользуемся произволом в выборе $\tau \in [0,T]$ и выберем его так, что $a(x,0)-2a_1\tau > 0$. Тогда (1.9) перепишем следующим образом

$$\int_0^l (u^2(x,\tau)+(a(x,0)-2a_1\tau)w^2(x,\tau))dx \le 2a_1\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,t)dxdt +$$

$$+(lK_0+c_0)\int_0^\tau\int_0^l u^2 dxdt + (1+c_0)\tau^2\int_0^\tau\int_0^l u^2 dxdt.$$

Учитывая выбор τ, положим

$$m = \min\{1, a(x,0)-2a_1\tau\}.$$

Разделив правую часть полученного неравенства на m, выберем M так, что

$$M = \max\{\frac{2a_1}{m}; \frac{(1+c_0)\tau^2}{m}; \frac{lK_0+c_0}{m}\}.$$

Окончательно получим

$$\int_0^l (u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau))dx \le M\int_0^\tau\int_0^l (u^2+w^2)dxdt. \qquad (1.10)$$

Применим лемму Гронуолла к (1.10). Обозначим

$$\rho(\tau) = \int_0^l (u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau))dt.$$

Тогда

$$\rho(\tau) \le M\int_0^\tau \rho(t)dt + f(t), \text{ где } \sigma(t)=0$$

$$\Rightarrow \rho(\tau) \le 0\cdot e^{M\tau} \Rightarrow \rho(\tau)\le 0 \Rightarrow \rho(\tau)=0.$$

Отсюда следует, что $u(x,t)=0$, а значит не может существовать более одного решения поставленной задачи.

Для доказательства существования решения будем искать решение задачи $(1.1)-(1.3)$ в специальном виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x), \qquad (1.11)$$

из соотношения

$$\int_0^l (u_{tt}w_l + au_x w_l' + cuw_l)dx + \int_0^l K(x)udxw_l = \int_0^l fw_l dx. \qquad (1.12)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что начальные условия однородные. Пусть $w_k(x)$-множество функций из $C^2[0,l]$, таких что $w_k(0)=w_k(l)=0.$ Функции $w_k(x)$ удовлетворяют граничным условиям, линейно независимы, а также данная система полна в W_2^1.

Подставим (1.11) в (1.12). Так как суммы конечны, то мы можем поменять порядок суммирования и интегрирования. Отметим, что все подынтегральные элементы нам известны, а значит все интегралы – какие-то числа. Таким образом получим систему дифференциальных уравнений относительно c_k

$$\sum_{k=1}^m A_{kl}c_k''(t) + \sum_{k=1}^m (B_{kl}+K_{kl})c_k(t) = f_l(t), \qquad (1.13)$$

где

$$A_{kl} = \int_0^l w_k(x)w_l(x)dx,\ B_{kl} = \int_0^l (aw_k'w_l' + cw_k(x)w_l(x))dx,$$

$$K_{kl} = \int_0^l K(x)w_k(x)w_l(x)dx,\ f_l = \int_0^l fw_l dx.$$

Система дифференциальных уравнений (1.13) разрешима относительно старших производных, так как матрица коэффициентов при старших производных есть матрица Грамма.

Присоединим к (1.13) следующие начальные условия

$$c_k(0)=c_k'(0)=0. \qquad (1.14)$$

Они возникают в силу того, что c_k должны удовлетворять граничным и начальным условиям задачи. Отметим, что (1.13) и (1.14) представляют собой задачу Коши. Следовательно, система дифференциальных уравнений (1.13) имеет решение, а в силу свойств коэффициентов исходного уравнения, это решение будет принадлежать пространству W_2^2. Таким образом мы построили последовательность приближенных решений.

Перейдем к исследованию построенной последовательности приближенных решений (если мы сможем доказать, что эта последовательность ограничена, то докажем и то, что из этой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность). Имеем

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_l + a u_x^m w_l' + c u^m w_l)dx = \int_0^l f w_l dx - \int_0^l K(x) w_l u^m dx. \qquad (1.15)$$

Умножим (1.15) на $c_l'(t)$, полученное выражение просуммируем по $l=\overline{1,m}$, а затем проинтегрируем от 0до τ. Преобразовав интегралы, получим

$$\int_0^\tau\int_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m)dxdt = \int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dxdt - \int_0^\tau\int_0^l K(x) u^m u_t^m dxdt. \qquad (1.16)$$

Последнее слагаемое в (1.16) перепишем, последовательно воспользовавшись интегрированием по частям, неравенством Коши с эпсилон и неравенство Коши-Буняковского. Получим

$$\int_0^\tau\int_0^l K(x) u^m u_t^m dxdt \le \frac{l}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2 dxdt + \frac{k_0}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2 dxdt + \frac{l\varepsilon}{2}\int_0^l (u_x^m)^2 dx + \frac{k_0}{2\varepsilon}\int_0^l (u^m)^2 dx.$$

После указанных преобразований выражение (1.16) примет следующий вид

$$\frac{1}{2}\int_0^l ((u_t^m(x,\tau))^2 + (a-l\varepsilon)(u_x^m)^2 + (u^m)^2)dx \le \int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t (u_x^m)^2 dxdt + \int_0^\tau\int_0^l c u^m u_t^m dxdt + \frac{l}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2 dxdt + \frac{k_0}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2 dxdt + \frac{k_0\tau}{2\varepsilon}\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2 dxdt. \qquad (1.17)$$

Выберем ε так, чтобы $(a-l\varepsilon)>0$. Отметим, что из условий $a_t \in C(\overline{Q_T})$ и $c(x,t)\in C^1(\overline{Q_T})$ следует, что существует $a_1>0: \max_{Q_T}|a_t|\le a_1$ и $c_0: \max_{Q_T}|c(x,t)|\le c_0$. Тогда из (1.17) следует

$$\frac{1}{2}\int_0^l ((u_t^m(x,\tau))^2 + (a-l\varepsilon)(u_x^m)^2 + (u^m)^2)dx \le \int_0^\tau\int_0^l f^2 dxdt + \frac{a_1+l}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_x^m)^2 dxdt + \frac{c_0}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2 dxdt + \frac{(c_0\varepsilon+\varepsilon+(\varepsilon+\tau)k_0)}{2\varepsilon}\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2 dxdt.$$

Положим

$$m_0 = \min\{1; a-l\varepsilon\},$$

$$M = \max\{a_1+l; c_0; \frac{1}{\varepsilon}(c_0\varepsilon+\varepsilon+k_0(\varepsilon+\tau))\}.$$

Тогда

$$m_0\int_0^l ((u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2)_{[t=\tau]} dxdt \le M\int_0^\tau\int_0^l ((u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2 dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f^2 dxdt.$$

К данному неравенству применим лемму Гронуолла и получим

$$\int_0^l ((u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2)_{[t=\tau]} dxdt \le \frac{1}{m_0} e^{\frac{M\tau}{m_0}} \| f \|_{L_2(\overline{Q_T})}^2 .$$

(1.18)

Проинтегрировав (1.18) от 0до τ, можно перейти к следующему неравенству

$$\| u^m \|_{W_2^1(\overline{Q_T})} \le \frac{1}{M}(e^{\frac{MT}{m_0}} - 1)\| f \|_{L_2(\overline{Q_T})}^2 .$$

Полученная последовательность приближенных решений представляет собой ограниченное в W_2^1 множество. Так как W_2^1 –

гильбертово, то из этой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность.

Итак, подпоследовательность u^m сходится к u слабо. Умножим обе части (1.12) на функцию $d_l(t)$ такую, что $d(T) = 0$. Затем, полученное выражение просуммируем от 0 до T. Тем самым мы получили некоторую функцию $\eta(x,t) = \sum_{l=1}^{m} d_l(t) w_l(x)$.

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t^m \eta_t + a u_x^m \eta_x + c u^m \eta) dxdt = \int_0^T \int_0^l f \eta dxdt - \int_0^T \int_0^l K(x) u^m \eta dxdt.$$

Зафиксируем функцию η и перейдем к $\lim\limits_{m\to\infty}$. Получим

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t \eta_t + a u_x \eta_x + c u \eta) dxdt = \int_0^T \int_0^l f \eta dxdt - \int_0^T \int_0^l K(x) u \eta dxdt.$$

Заметим, что η всюду плотно в C, а следовательно, всюду плотно и в W_2^1. Тем самым доказано существование решения.

Таким образом доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1) – (1.3).

Литература

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 304 с.
2. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. №1 (12). С. 103–108.
3. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
4. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: Гылым, 2010. 334 с.
5. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995. 270 с.
6. Пулькина Л. С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Самарский университет, 2012. 194 с.
7. Стеклов В. А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела // Сообщ. Харьковского мат. о-ва. 1896. № 3-4 (5). С. 136–181.
8. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Дифференциальные уравнения. 1968. № 4 (185). С. 739–740.
9. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. № 9 (42). С. 1166–1179.
10. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 297 с.
11. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A LOADED HYPERBOLIC EQUATION

A. V. Gilev

In this article, there is the initial-boundary-value problem for a loaded integro-differential equation. There is proves of the existence and uniqueness of the generalized solution of the problem. There are found restrictions on the input data, the implementation of which there is a single generalized solution of this problem. The proof of uniqueness is carried out using a priori estimates. To prove the existence of a generalized solution, was constructed a sequence of approximate solutions, was proved the boundedness of this sequence, which made possible to distinguish a weakly convergent subsequence from this sequence and then showed that the weak limit of the selected subsequence is a generalized solution to problems.

Key words: non-classical problem, generalized solution, solvability, Sobolev space, weak convergence.

Статья поступила в редакцию 08.07.2020 г.

Gilev Anton Vladimirovich (toshqaaa@gmail.com),
student V course of the Samara University Mathematics Faculty,
443086, Russia, Samara, Moskovskoye Shosse, 34.