ФИЗИКА

УДК 533.6.011

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ МЕТОДОВ ТАРГА-ШВЕЦА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ НАНОЖИДКОСТИ В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ НА РАСТЯГИВАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д. С. Андриевская, В. Г. Шахов

Рассматривается течение наножидкости в критической точке на растягиваемой поверхности. Жидкость – вода, содержащая твёрдые частицы меди Cu. Составлены уравнения пограничного слоя для исследуемого течения. Проведён расчёт ламинарного пограничного слоя приближёнными методами и сравнение с раннее опубликованными результатами других авторов. Решения уравнений найдены приближённым методом Тарга-Швеца, которые сравниваются с полученными в работе. Построены графики зависимости безразмерного касательного напряжения на растягивающейся/сжимающейся пластине от безразмерной скорости её поверхности, на которых приведены сравнения с опубликованными результатами. Сделаны выводы о применимости приближённого метода Тарга-Швеца для решения данной задачи.

Ключевые слова: ламинарный пограничный слой, стационарное движение, растягивающаяся/сжимающаяся пластина, касательное напряжение, теория слоя конечной толщины.

В данной работе рассматривается течение наножидкости в критической точке на растягиваемой поверхности, в котором в качестве жидкости используется вода, а в качестве твёрдых частиц – медь [1].

Большинство обычных теплоносителей, таких как вода, этиленгликоль и моторное масло, обладают ограниченными тепловыми свойствами, что, в свою очередь, может налагать ограничения на многие тепловые приложения. С другой стороны, большинство твёрдых веществ, в частности металлы, имеют гораздо более высокую теплопроводность, примерно на 1–3 порядка величины, по сравнению с жидкостями. Следовательно, можно ожидать, что жидкости, содержащие твёрдые частицы, могут значительно повысить теплопроводность.

Поток через непрерывно растягивающуюся поверхность является важной проблемой во многих технологических процессах в таких отраслях промышленности, как горячая прокатка, вытягивание проволоки, производство бумаги, выдув стекла, вытягивание пластиковых лент и производство стекловолокна. Качество конечного продукта зависит от скорости теплопередачи на растягиваемой поверхности.

Постановка задачи

В случае стационарного движения несжимаемой жидкости уравнения пограничного слоя [2] будут иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U_\infty\frac{dU_\infty}{dx}+\nu_f\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{2}$$

а граничные условия при внешнем обтекании пластины, растягивающейся или сжимаю-

Андриевская Дарья Сергеевна (andrievskaia.dariya@gmail.com), студент IV курса института ракетно-космической техники;
Шахов Валентин Гаврилович (shakhov@ssau.ru), профессор кафедры конструкции и проектирования летательных аппаратов Самарского университета, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

щейся в своей плоскости, запишутся так [1]:

$$\begin{cases} u = U_w, \\ v = 0 \text{ при } y = 0, \\ u \to U_\infty \text{ при } y \to \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y, соответственно; $\nu_f = \frac{\mu_f}{\rho_{nf}}$ – кинематический коэффициент вязкости жидкости ($\mu_f = \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}}$ – относительная динамическая вязкость жидкости; $\rho_{nf} = 1 - \varphi + \varphi\frac{\rho_s}{\rho_f}$ – относительная плотность наножидкости, где φ – объёмная доля наночастиц, ρ_f – плотность жидкости (в данном случае воды), ρ_s – плотность наночастиц (в данном случае меди Cu)), $U_\infty = bx$ – скорость течения жидкости, $U_w = ax$ – скорость растягивания/сжатия, где a и b – константы, $b > 0$, $a > 0$ и $a < 0$ отвечают растягивающейся и сжимающейся поверхностям, соответственно.

Уравнения (1), (2), удовлетворяющие граничным условиям (3), можно переписать в более удобной форме с помощью следующего преобразования:

$$\eta = \left(\frac{b}{\nu_f}\right)^{\frac{1}{2}} y, \;\; \psi = \left(\nu_f b\right)^{\frac{1}{2}} x\, f(\eta), \quad (4)$$

где η – переменная подобия, ψ – функция тока, определённая как $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ и удовлетворяющая уравнению (1), $f(\eta)$ – безразмерная функция тока.

Используя преобразование (4), уравнение (2) примет вид

$$\frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}\left(1-\varphi+\varphi\frac{\rho_s}{\rho_f}\right)} f''' + f f'' - f'^2 + \\ +1 = 0. \quad (5)$$

Тогда граничные условия (3) запишутся следующим образом:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \varepsilon, \quad f'(\eta) \to 1 \text{ при } \eta \to \infty.$$

Здесь ε – это параметр соотношения скоростей, $\varepsilon = \frac{a}{b}$. При $\varepsilon > 0$ – поверхность растягивается, при $\varepsilon < 0$ – поверхность сжимается.

Используя условие плавности смыкания из граничного условия $f'(\eta) \to 1$ при $\eta \to \infty$ и переходя от асимптотической теории к теории слоя конечной толщины, получим четвёртое граничное условие, необходимое для нахождения толщины слоя η_∞:

$$f''(\eta_\infty) = 0.$$

Окончательно граничные условия запишутся:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \varepsilon, \\ f'(\eta_\infty) = 1, \quad f''(\eta_\infty) = 0. \quad (6)$$

Введём в (5) и (6) замену $f' = u$, тогда $f = \int_0^\eta u\, d\eta$.

Обозначим $A = (1-\varphi)^{2.5}(1-\varphi+\varphi\frac{\rho_s}{\rho_f})$ и перенесём в (5) все члены в правую часть, за исключением u''.

Тогда уравнение (5) и граничные условия (6) запишутся в следующем виде:

$$u'' = A\left(-u'\int_0^\eta u\, d\eta + u^2 - 1\right), \quad (7)$$

$$u(0) = \varepsilon, \quad u(\eta_\infty) = 1, \quad u'(\eta_\infty) = 0. \quad (8)$$

Решение задачи приближённым методом Тарга-Швеца

Простые и близкие по идее приближённые методы расчёта ламинарного пограничного слоя разработали С. М. Тарг и М. Е. Швец [3]. Эти методы не используют интегральные соотношения. Мы рассмотрим применение этих приближённых методов для решения нашей задачи.

Вычислим нулевое приближение, подставив в правую часть уравнения (7) $u = 0$.

Имеем

$$u_0'' = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получим нулевое приближение

$$u_0 = \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{\eta_\infty}\eta.$$

Подстановка этого нулевого приближения в уравнение (7) даёт

$$u'' = \mathrm{A}\left(\frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\,{\eta_\infty}^2}\,\eta^2+\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{\eta_\infty}\eta+\varepsilon^2-1\right).$$

Дважды интегрируя это уравнение и находя постоянные интегрирования из первого и второго граничных условий (7), получаем:

$$u' = \mathrm{A}\left(\frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}{6\,{\eta_\infty}^2}\,\eta^3+\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{2\,\eta_\infty}\,\eta^2+\varepsilon^2\,\eta-\eta\right)+$$
$$+\frac{24-24\,\varepsilon+11A\;{\eta_\infty}^2-2A\,\varepsilon\,{\eta_\infty}^2-9A\,\varepsilon^2\,{\eta_\infty}^2}{24\,\eta_\infty}, \quad (9)$$

$$u = \mathrm{A}\left(\frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2}{24\,{\eta_\infty}^2}\,\eta^4+\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{6\,\eta_\infty}\,\eta^3+\frac{\varepsilon^2-1}{2}\,\eta^2\right)+$$
$$+\frac{24-24\,\varepsilon+11\,A\,{\eta_\infty}^2-2A\,\varepsilon\,{\eta_\infty}^2-9A\,\varepsilon^2\,{\eta_\infty}^2}{24\,\eta_\infty}\eta+$$
$$+\varepsilon. \quad (10)$$

Чтобы найти η_∞, воспользуемся четвёртым граничным условием (6). После подстановки его в (9) и преобразований получим

$$\frac{1}{\eta_\infty}-\frac{\varepsilon}{\eta_\infty}-\frac{3\,A\,\eta_\infty}{8}+\frac{A\,\varepsilon\,\eta_\infty}{12}+\frac{7}{24}A\,\varepsilon^2\,\eta_\infty=0.$$

Решая это уравнение, находим два корня:

$$\eta_{\infty1}=-\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{A\,(9+7\varepsilon)}},$$
$$\eta_{\infty2}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{A\,(9+7\varepsilon)}}.$$

Значение $\eta_{\infty1}<0$ не удовлетворяет условиям задачи, т.к. по определению $\eta_\infty>0$.

Подставим найденное значение η_∞ в уравнения (9) и (10):

$$u = A\left(\frac{A}{576}(\varepsilon-1)^2\,(9+7\varepsilon)\,\eta^4-\right.$$
$$-\frac{(\varepsilon-1)\sqrt{A\,(9+7\varepsilon)}\,\varepsilon}{12\sqrt{6}}\,\eta^3+\frac{\varepsilon^2-1}{2}\eta^2-$$
$$\left.-\frac{A}{576}\frac{192\sqrt{6}\,(35-7\varepsilon-28\varepsilon^2)}{7\sqrt{A(9+7\varepsilon)}}\eta\right)+\varepsilon,$$

$$u' = A\left(\frac{A}{144}(\varepsilon-1)^2(9+7\varepsilon)\,\eta^3-\right.$$
$$-\frac{(\varepsilon-1)\sqrt{A\,(9+7\varepsilon)}\,\varepsilon}{4\sqrt{6}}\eta^2+(\varepsilon-1)^2\,\eta+$$
$$\left.+\frac{\sqrt{6}\,(5-\varepsilon-4\varepsilon^2)}{3\sqrt{A\,(9+7\varepsilon)}}\right). \quad (11)$$

Подстановка $\eta=0$ в (11) даёт формулу для расчёта безразмерной величины напряжения трения на пластине

$$u'(0)=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{6}\,(5-\varepsilon-4\varepsilon^2)}{3\sqrt{A\,(9+7\varepsilon)}}}A. \quad (12)$$

Выберем три значения объёмной доли наночастиц φ: 0, 0.1 и 0.2 [1]. Плотность жидкости (в данном случае воды) – $\rho_f=997.1\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность наночастиц (в данном случае меди Cu) – $\rho_s=8933\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Тогда получим три значения A: $1, 1.38, 1{,}48$.

Расчёты по формуле (12) $u'(0)=f''(0)$ в зависимости от ε при разных значениях φ показаны на рис. 1.

Для сравнения на рис. 2 представлен график из [1].

Сравнивая эти два графика, видим хорошее согласование, следовательно, приближённый метод Тарга-Швеца применим к этой задаче.

Если в уравнении (7) отбросить только нелинейные члены, то получим следующее нулевое приближение:

$$u_0''=-A.$$

Повторяя описанные выше преобразования, приходим к результатам, не имеющим физического смысла. Видимо, применимость метода Тарга-Швеца в некоторых случаях сильно зависит от начального приближения.

Заключение

При соотношении скоростей, характеризуемым неравенством $\varepsilon>-1.0$ можно пользоваться простой формулой (12), полученной приближённым методом Тарга-Швеца.

Литература

1. Bachok N., Ishak A., Pop I. Stagnation-point flow over a stretching/shrinking sheet in a nanofluid // Nanoscale Research Letters 2011, Vol. 6. p. 623.

2. Лойцянский Л. С. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.

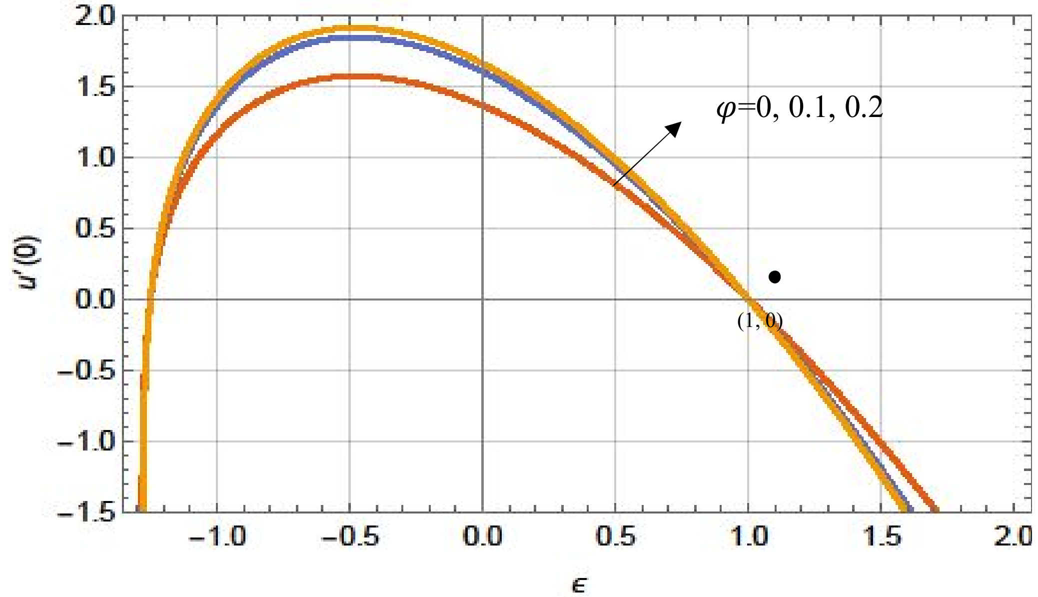

Рис. 1. Зависимость $u'(0)$ от ε, полученная первым способом

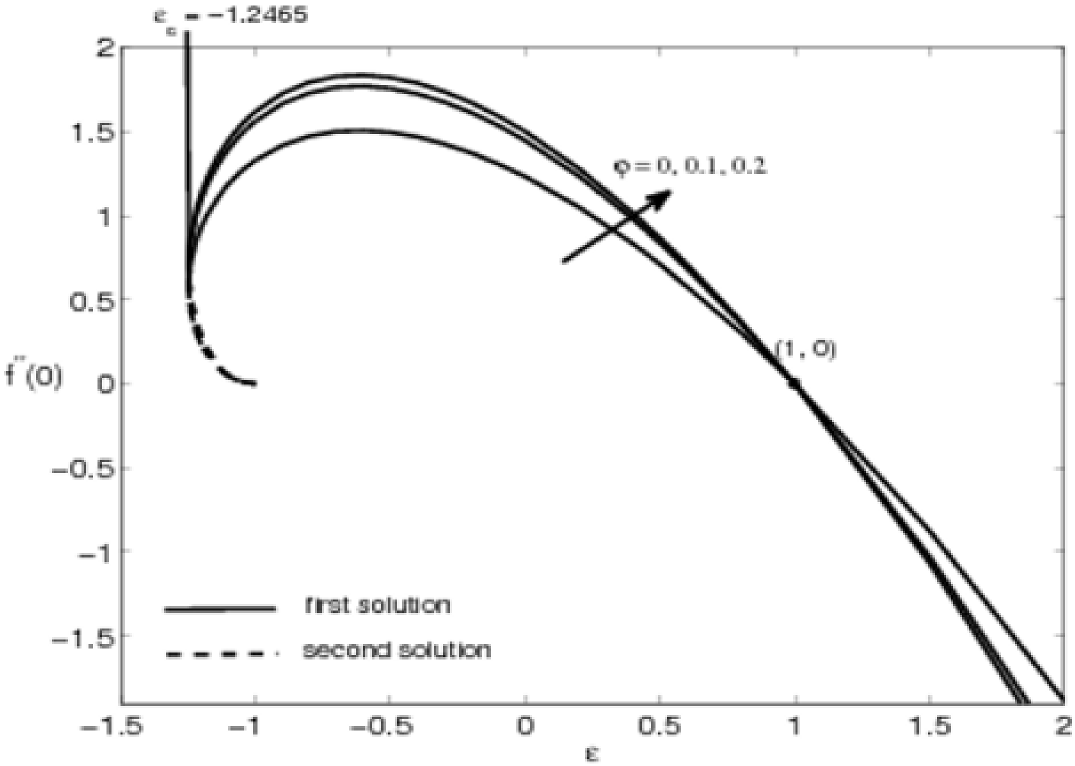

Рис. 2. Зависимость $u'(0)$ от ε [2]

APPLICATION OF APPROXIMATE TARG-SHVETS METHODS FOR STAGNATION-POINT FLOW OVER A STRETCHING / SHRINKING SHEET IN A NANOFLUID

D. S. Andrievskaia, V. G. Shakhov

Flow about stagnation point over a stretching/shrinking sheet in a nanofluid is discussed. Liquid is water containing solid particles of copper. The laminar boundary layer is calculated using approximate methods and compared with the previously published results. Solutions of the equations were found by the Targ-Shvets method. Graphs of dependence of dimensionless tangential tension on a stretching/shrinking surface from dimensionless speed of its surface are constructed, on which comparisons with the published results are presented. The conclusions about the applicability of the approximate Targ-Shvets method to the solution of this problem are made.

Key words: laminar boundary layer, steady state, stretching/shrinking surface, tangential tension, layers of finite thickness theory.

Статья поступила в редакцию 08.07.2020 г.

Andrievskaia Daria Sergeyevna (andrievskaia.dariya@gmail.com),
student IV course of the Institute of Space Rocket Engineering,
Shakhov Valentin Gavrilovich (shakhov@ssau.ru),
professor of the Department of Aircraft Construction and Design of the Samara University,
443086, Russia, Samara, Moskovskoye Shosse, 34.